Nota sul viriale

L. P.

Giugno 2007

Consideriamo un punto materiale di massa m che si muove in una regione di spazio in cui è presente un campo di forze $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$. S definisce **viriale** del corpo la quantità Q definita da

$$Q = \boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{p}}, \tag{1}$$

dove $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ è la quantità di moto del corpo. Evidentemente Q dipende dal punto rispetto a cui viene valutato il raggio vettore $\boldsymbol{r}$.

Valutiamo la derivata rispetto al tempo di Q:

$$\dot{Q} = \dot{\boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{p}} = mv^2 + \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{f}, \tag{2}$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che

$$mv^2 = \boldsymbol{v}\cdot m\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{p}, \tag{3}$$

e il II principio della dinamica.

D'altra parte, se il movimento del corpo è approssimativamente limitato tanto in velocità che in posizione, il viriale Q non potrà variare di una quantità arbitraria in un tempo arbitrariamente lungo. Quindi *il valor medio di $\dot{Q}$ su un intervallo di tempo di lunghezza T dovrà tendere a zero al crescere di T*:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t'\ \dot{Q}(t') = \lim_{T\to\infty}\frac{Q(T)-Q(0)}{T} = 0. \tag{4}$$

Indichiamo con una barra la media temporale della quantità A:

$$\overline{A} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t'\ A(t'). \tag{5}$$

Dalla (4) otteniamo

$$\overline{2K} = -\overline{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{f}}, \tag{6}$$

dove $K = mv^2/2$ è l'energia cinetica della particella. D'altra parte, poiché, per definizione d'energia potenziale, si ha

$$\boldsymbol{f} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}, \tag{7}$$

la quantità a secondo membro ha per espressione

$$-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{f} = \boldsymbol{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}. \tag{8}$$

Consideriamo il caso in cui $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$ è un campo gravitazionale dovuto a un corpo posto nell'origine delle coordinate:

$$\boldsymbol{f} = -\frac{\mu m}{r^2}\hat{r}. \tag{9}$$

Allora

$$-\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{f} = \frac{\mu m}{r} = -U(\boldsymbol{r}). \tag{10}$$

In questo caso, si ha quindi

$$2\overline{K} = -\overline{U}. \tag{11}$$

Quindi, dato che si ha, per la conservazione dell'energia meccanica

$$K + U = E, \tag{12}$$

prendendo la media, otteniamo, per esempio,

$$\overline{K} = E - \overline{U} = E + 2\overline{K}, \tag{13}$$

per cui

$$\overline{K} = -E, \tag{14}$$

e, ovviamente

$$\overline{U} = 2E. \tag{15}$$

Otteniamo così il seguente risultato.

Per un pianeta in un'orbita chiusa attorno al Sole, il valor medio dell'energia cinetica è uguale al modulo del valor medio dell'energia potenziale.