Proprietà fondamentali dei vettori

Luca Peliti

6 Luglio 2012

In queste note vorrei dimostrare in maniera esaustiva le proprietà elementari dei vettori nello spazio in tre dimensioni supponendo nota solo la geometria euclidea elementare nello spazio.

1 Definizioni

Indicheremo con le maiuscole A, B, ecc., dei punti nello spazio fisico in tre dimensioni, e con lettere minuscole in corsivo r, s ecc., delle rette nello stesso spazio. Dati due punti distinti, p.es. A e B, indicheremo con (AB) la retta che passa per essi. Indicheremo gli angoli con lettere greche: α, β, ecc. Due punti, A e B (non necessariamente distinti), presi nell'ordine, identificano un **segmento orientato** che sarà indicato con $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Si dice che il segmento orientato $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ **origina** dal punto A e **termina** nel punto B. Dati due segmenti orientati $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$, se $\mathrm{A} = \mathrm{C}$ e $\mathrm{B} = \mathrm{D}$, si dice che i segmenti **coincidono** e si scrive $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \equiv \overrightarrow{\mathrm{CD}}$. La lunghezza del segmento orientato $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ è un numero non negativo che sarà indicato con $\overline{\mathrm{AB}}$. Per ogni punto A si ha evidentemente $\overline{\mathrm{AA}} = 0$.

Definizione. *Due segmenti orientati* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ *e* $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ *sono detti* ***equivalenti****, e si scrive* $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$*, se* $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CD}}$*, e inoltre i segmenti* AB *e* CD *sono paralleli, e si ha* $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BD}}$*.*

Evidentemente tutti i segmenti orientati della forma $\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ sono equivalenti.

È facile vedere che questa relazione possiede le tre proprietà delle **relazioni d'equivalenza**:

Riflessività: $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Simmetria: Se $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$, allora $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Transitività: Se $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{EF}}$, allora $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{EF}}$. Questa è la sola proprietà che non sia immediatamente evidente. Essa si dimostra notando che si ha $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{EF}}$ per la transitività dell'uguaglianza fra numeri, e osservando che i triangoli $\triangle\mathrm{ACE}$ e $\triangle\mathrm{BDF}$ sono uguali per il primo criterio, da cui segue $\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{BF}}$.

Data una relazione d'equivalenza, è naturale definire la classe d'equivalenza rispetto a questa relazione.

Definizione. *Dato un segmento orientato* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$*, l'insieme di tutti i segmenti orientati ad esso equivalenti è un* ***vettore*** $\boldsymbol{v}$ *di cui* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ *è* ***rappresentativo****.*

Spesso, con abuso di notazione, scriveremo $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, e diremo che $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ è un **rappresentante** di $\boldsymbol{v}$, o che $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ **rappresenta** $\boldsymbol{v}$. Con questa notazione, l'espressione $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ ha due interpretazioni: rappresenta l'equivalenza fra i segmenti orientati $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$, oppure l'uguaglianza fra i vettori che essi rappresentano. Questa ambiguità non porterà in realtà a nessuna contraddizione, poiché le due interpretazioni sono equivalenti.

Definizione. *Il **vettore nullo**, indicato con* 0*, è il vettore rappresentato dai segmenti orientati della forma* $\overrightarrow{\mathrm{AA}}$*, dove il punto* A *è arbitrario.*

Definizione. *Due vettori sono detti **paralleli** se sono tali due segmenti orientati che li rappresentano.*

È facile mostrare che, se si possono trovare due segmenti orientati, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{v}$ e $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \boldsymbol{w}$, tali che $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \parallel \overrightarrow{\mathrm{CD}}$, allora *tutti* i segmenti orientati rappresentativi di $\boldsymbol{v}$ sono paralleli a ciascun segmento orientato rappresentativo di $\boldsymbol{w}$, e che quindi questa proprietà non dipende dalla scelta dei vettori rappresentativi dei due vettori.

Definizione. *Due vettori paralleli* $\boldsymbol{v}$ *e* $\boldsymbol{w}$ *sono detti **concordi** se, dati due segmenti orientati loro rappresentanti* $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{v}$ *e* $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{w}$*, originanti dallo stesso punto* O*, il punto* A *appartiene al segmento* OB *oppure il punto* B *appartiene al segmento* OA*. (I punti* A *e* B *possono coincidere.)*

In particolare, il vettore nullo è parallelo e concorde con qualunque vettore.

Definizione. *Due vettori paralleli si dicono **discordi** se non sono concordi.*

Definizione. *Una **direzione orientata** (spesso semplicemente **direzione**) è una classe d'equivalenza di vettori rispetto alla proprietà di essere paralleli e concordi.*

Si dice che due vettori hanno la stessa direzione orientata se sono paralleli e concordi. Il vettore nullo ha la stessa direzione orientata di qualunque vettore.

Definizione. *Se due vettori paralleli sono discordi, si dice che hanno direzioni orientate **opposte**.*

Si può dire anche che essi hanno la stessa direzione, ma versi opposti.

Definizione. *Il **modulo** di un vettore* $\boldsymbol{v}$*, indicato con* v *oppure* $|\boldsymbol{v}|$*, è pari alla lunghezza* $\overline{\mathrm{AB}}$ *di un qualunque suo rappresentante* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$*. Esso si indica anche con* $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$*.*

Si ha $|\boldsymbol{v}| = 0$ se $\boldsymbol{v} = 0$. È vero anche il viceversa, poiché in tal caso ogni rappresentante di $\boldsymbol{v}$ è un segmento orientato di lunghezza nulla.

Teorema. *Ogni vettore* $\boldsymbol{v}$ *è univocamente identificato dal suo modulo e dalla sua direzione orientata.*

Dimostrazione. Supponiamo che i vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ abbiano modulo uguale, e la stessa direzione orientata, e siano $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ due loro rappresentanti, originanti dallo stesso punto O. Allora o A appartiene a OB, o B appartiene a OA. D'altra parte $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}}$, per cui $\mathrm{A} = \mathrm{B}$, e quindi i segmenti orientati $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ coincidono, e rappresentano lo stesso vettore. ■

Si dice quindi che i vettori sono "enti geometrici caratterizzati da lunghezza (modulo), direzione e verso (direzione orientata)".

2 Operazioni elementari

Definizione. *Dato un vettore* $\boldsymbol{v}$ *e un numero reale (detto anche* ***scalare****)* λ*, si definisce il prodotto* $\lambda\boldsymbol{v}$ *come il vettore di modulo* $|\lambda|v$*, parallelo a* $\boldsymbol{v}$*, e concorde o discorde con esso secondo che* $\lambda \geq 0$ *o* $\lambda < 0$ *rispettivamente.*

In pratica, se $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ rappresenta il vettore $\boldsymbol{v}$, un rappresentante di $\lambda\boldsymbol{v}$ può essere ottenuto prendendo un segmento orientato che origina in A, è parallelo a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, ha lunghezza $\lambda\overline{\mathrm{AB}}$, ed è concorde con esso se $\lambda \geq 0$, o discorde se $\lambda < 0$. Per convenzione, si usa anche la notazione $\boldsymbol{v}\lambda$.

Teorema. *Il prodotto di un vettore* $\boldsymbol{v}$ *per uno scalare gode della proprietà associativa:* $\lambda(\mu\boldsymbol{v}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{v}$ *e commutativa:* $\lambda(\mu\boldsymbol{v}) = \mu(\lambda\boldsymbol{v})$*.*

Dimostrazione. Sia $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\mu\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ e $(\lambda\mu)\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$. Allora $\overline{\mathrm{AD}} = |\lambda|\overline{\mathrm{AC}} = |\lambda\mu|\overline{\mathrm{AB}}$. La tesi è quindi dimostrata se $\lambda \geq 0$ e $\mu \geq 0$ (basta togliere i moduli), e si verifica esplicitamente nel caso in cui λ o μ (o entrambi) sono negativi. ■

Definizione. *Dati i vettori* $\boldsymbol{v}$ *e* $\boldsymbol{w}$ *si definisce la loro* ***somma****, e si indica con* $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$*, il vettore rappresentato da* $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$*, dove* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ *e* $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ *sono rispettivamente rappresentanti di* $\boldsymbol{v}$ *e* $\boldsymbol{w}$*.*

Con abuso di notazione, scriveremo anche $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ se $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sono rispettivamente rappresentanti di $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ e $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$.

Teorema. *L'operazione di somma fra vettori possiede la proprietà commutativa.*

Dimostrazione. In effetti, se $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ è un rappresentante di $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$, dove $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ e $\boldsymbol{w} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$, allora un rappresentante di $\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}$ è dato da $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, dove $\boldsymbol{w} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ e $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$, e ABCD formano un parallelogramma. ■

Per questo motivo, la regola della somma di vettori è detta **regola del parallelogramma**.

Teorema. *L'operazione di somma fra vettori possiede la proprietà associativa.*

Dimostrazione. Siano $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ tre vettori arbitrari. Vogliamo mostrare che

$$\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}.$$

Siano $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ rappresentanti rispettivamente di $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$. Allora $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ è rappresentato da $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$, e $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ rappresenta $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, Quindi ambo i membri di questa espressione sono rappresentati da $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$. ■

Teorema. *Le operazioni di prodotto per uno scalare e di somma possiedono la proprietà distributiva:*

$$\lambda(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \lambda\boldsymbol{v} + \lambda\boldsymbol{w}.$$

Dimostrazione. Se $\lambda = 0$, il teorema è banale. Supponiamo $\lambda > 0$, e siano $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ rispettivamente rappresentanti di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$. Sia $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ rappresentante di $\lambda\boldsymbol{v}$ e $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ rappresentante di $\boldsymbol{w}$. Allora $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ è rappresentante di $\lambda\boldsymbol{v} + \lambda\boldsymbol{w}$. D'altra parte, poiché BD $\parallel$ ED, i triangoli $\triangle$ABC e $\triangle$ADE sono simili. Quindi $\overline{\mathrm{AE}}/\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AD}}/\overline{\mathrm{AB}} = \lambda$. Lo stesso ragionamento si applica se $\lambda < 0$, tranne che in questo caso il triangolo $\triangle$ADE si trova dalla parte opposta a $\triangle$ABC. ■

Definizione. *L'**opposto** $-\boldsymbol{v}$ di un vettore $\boldsymbol{v}$ è il vettore $\boldsymbol{w}$ che soddisfa l'equazione*

$$\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} = 0.$$

Teorema. *Il vettore $-\boldsymbol{v}$ è unico, è parallelo a $\boldsymbol{v}$ e, se $\boldsymbol{v} \neq 0$ è discorde con esso.*

Dimostrazione. Sia $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ un rappresentante di $\boldsymbol{v}$. Allora $\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ è un rappresentante di $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$. Quindi $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ è un rappresentante di $\boldsymbol{w}$. Ma $\overline{\mathrm{AO}} = \overline{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AO}} \parallel \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ e ovviamente $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ sono discordi. ■

Definizione. *La somma di $\boldsymbol{v}$ e dell'opposto $-\boldsymbol{w}$ di $\boldsymbol{w}$ è chiamata la **differenza** di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ ed è rappresentata da $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$.*

Teorema. *Se $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ sono paralleli e $\boldsymbol{v} \neq 0$, esiste un numero reale λ tale che $\boldsymbol{w} = \lambda\boldsymbol{v}$.*

Dimostrazione. Siano $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, rispettivamente, rappresentativi di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$. Si ponga $|\lambda| = \overline{\mathrm{OB}}/\overline{\mathrm{OA}}$. ($\overline{\mathrm{OA}} \neq 0$ poiché $\boldsymbol{v} \neq 0$.) Se $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ sono concordi, si pone $\lambda = |\lambda|$, altrimenti $\lambda = -|\lambda|$. È immediato mostrare che se $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ è un rappresentante di $\lambda\boldsymbol{v}$, esso è un rappresentante di $\boldsymbol{w}$. ■

In particolare è facile vedere che, se $\lambda = -1$, si ha $\lambda\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$ per ogni vettore $\boldsymbol{v}$.

Definizione. *Tre vettori, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$, sono detti **complanari** se, dati i loro rappresentanti $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ originanti dallo stesso punto* O, *i punti* O, A, B *e* C *appartengono allo stesso piano.*

È facile vedere che questa definizione non dipende dalla scelta del punto O.

Teorema. *Se i tre vettori $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ sono complanari, e $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ non sono nulli, esistono due numeri reali α e β tali che $\boldsymbol{w} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}$.*

Dimostrazione. Si scelga O, e siano $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ rispettivamente rappresentanti di $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$. Sia $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ rappresentante di $\boldsymbol{w}$, e siano i punti H e K tali che $\overrightarrow{\mathrm{OH}} \parallel \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{OK}} \parallel \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, e che OHCK formi un parallelogramma. Si scelgano α e β in modo che $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{OK}} = \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$. Si ha allora $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$. ■

È facile vedere anche il viceversa, cioè che se, per una coppia di numeri reali (α, β) si ha $\boldsymbol{w} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}$, allora $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ sono complanari.

Questa costruzione può essere generalizzata al caso di vettori nello spazio.

Teorema. *Sia $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ una terna di vettori non complanari. Allora, dato un qualunque vettore $\boldsymbol{z}$, esiste una terna (α, β, γ) di numeri reali tale che*

$$\boldsymbol{z} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} + \gamma\boldsymbol{w}.$$

Dimostrazione. Siano $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ rispettivamente rappresentanti di $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$, e $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ rappresentante di $\boldsymbol{z}$. Si scelga H nel piano OAB in modo che $\overrightarrow{\mathrm{HD}}$ sia parallelo a $\boldsymbol{w}$. Siano α e β tali che $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}$. Allora $\boldsymbol{z} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} + \overrightarrow{\mathrm{HD}}$. D'altra parte, poiché $\overrightarrow{\mathrm{HD}} \parallel \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ esiste γ tale che $\overrightarrow{\mathrm{HD}} = \gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}$. Quindi $\boldsymbol{z} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}$. ■

Definizione. *Dato un vettore $\boldsymbol{z}$ e una terna $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ di vettori non complanari, l'espressione*

$$\boldsymbol{z} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} + \gamma\boldsymbol{w}$$

*definisce la terna (α, β, γ) delle **componenti** di $\boldsymbol{z}$ nelle direzioni della terna $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$.*

Teorema. *Se la terna* $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ *è costituita da vettori non complanari, e si ha*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z} &= \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} + \gamma\boldsymbol{w}; \\ \boldsymbol{z} &= \alpha'\boldsymbol{u} + \beta'\boldsymbol{v} + \gamma'\boldsymbol{w}; \end{aligned}$$

allora $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ *e* $\gamma = \gamma'$.

Dimostrazione. Sottraendo membro a membro le due espressioni, e sfruttando la proprietà distributiva del prodotto per un reale e della somma, otteniamo

$$\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z} = 0 = (\alpha - \alpha')\boldsymbol{u} + (\beta - \beta')\boldsymbol{v} + (\gamma - \gamma')\boldsymbol{w}.$$

Supponiamo, p.es., $\alpha - \alpha' = \epsilon \neq 0$. Allora, sottraendo $\epsilon\boldsymbol{u}$ ad ambo i membri di questa equazione otteniamo

$$-\epsilon\boldsymbol{u} = (\beta - \beta')\boldsymbol{v} + (\gamma - \gamma')\boldsymbol{w}.$$

Dividendo per $-\epsilon$ (che nelle nostre ipotesi non è nullo), otteniamo

$$\boldsymbol{u} = -\frac{\beta - \beta'}{\epsilon}\boldsymbol{v} - \frac{\gamma - \gamma'}{\epsilon}\boldsymbol{w}.$$

Quindi $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ sono complanari, contrariamente all'ipotesi. ■

Teorema.
1. *Le componenti del prodotto* $\lambda\boldsymbol{z}$ *del vettore* $\boldsymbol{z}$ *nelle direzioni della terna* $\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ *sono uguali al prodotto di* λ *per ciascuna delle componenti di* $\boldsymbol{z}$ *nelle direzioni di* $\boldsymbol{\tau}$.
2. *Inoltre le componenti della somma* $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ *nelle direzioni di* $\boldsymbol{\tau}$ *sono uguali alla somma delle rispettive componenti.*

Dimostrazione.
1. Sia $\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ e siano (α, β, γ) tali che

   $$\boldsymbol{z} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} + \gamma\boldsymbol{w}.$$

   Allora si ha, per la distributività del prodotto con uno scalare e della somma,

   $$\lambda\boldsymbol{z} = (\lambda\alpha)\boldsymbol{u} + (\lambda\beta)\boldsymbol{v} + (\lambda\gamma)\boldsymbol{w}.$$

   Il risultato segue dall'univocità delle componenti di un vettore nelle direzioni di una terna non complanare.
2. Sia $\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ e siano (α, β, γ) e $(\alpha,', \beta', \gamma')$ tali che si abbia rispettivamente

   $$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} + \gamma\boldsymbol{w}; \\ \boldsymbol{z} &= \alpha'\boldsymbol{u} + \beta'\boldsymbol{v} + \gamma'\boldsymbol{w}. \end{aligned}$$

   Per la distributività del prodotto con uno scalare e della somma fra vettori si ha

   $$\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = (\alpha + \alpha')\boldsymbol{u} + (\beta + \beta')\boldsymbol{v} + (\gamma + \gamma')\boldsymbol{w}.$$

   Il risultato segue dall'univocità delle componenti di un vettore nelle direzioni di una terna non complanare.

■

Siano $\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \boldsymbol{\tau}_3)$ e $\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_3)$ due terne di vettori non complanari. Da quanto abbiamo mostrato, si ha

$$\boldsymbol{\tau}_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\boldsymbol{\omega}_j, \qquad i = 1, 2, 3.$$

In questa espressione, i coefficienti (a_{ij}) formano una matrice:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Possiamo quindi scrivere più compattamente

$$\boldsymbol{\tau} = \mathsf{A}\boldsymbol{\omega},$$

intendendo il prodotto secondo le note regole del prodotto di una matrice per un vettore (colonna).

Teorema. *Se* $\boldsymbol{\sigma} = \mathsf{A}\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\tau} = \mathsf{B}\boldsymbol{\omega}$ *e* $\boldsymbol{\sigma} = \mathsf{C}\boldsymbol{\omega}$, *allora*

$$\mathsf{C} = \mathsf{AB},$$

intendendo il prodotto secondo le note regole del prodotto fra matrici.

Dimostrazione. Si ha in effetti, per $i = 1, 2, 3$,

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\boldsymbol{\tau}_k = \sum_{k,j=1}^{3} a_{ik}b_{kj}\boldsymbol{\omega}_j,$$

per cui

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_{kj}.$$

■

Teorema. *Se* $\boldsymbol{\tau} = \mathsf{A}\boldsymbol{\omega}$ *e* $\boldsymbol{\omega} = \overline{\mathsf{A}}\boldsymbol{\tau}$, *la matrice* $\overline{\mathsf{A}}$ *è la matrice inversa di* A.

Dimostrazione. Moltiplicando per $\overline{\mathsf{A}}$ a sinistra l'uguaglianza $\boldsymbol{\tau} = \mathsf{A}\boldsymbol{\omega}$ otteniamo $\overline{\mathsf{A}}\boldsymbol{\tau} = \overline{\mathsf{A}}\mathsf{A}\boldsymbol{\omega}$. Ma il primo membro è uguale a $\boldsymbol{\omega}$ per ipotesi. Quindi per l'univocità della decomposizione, si deve avere $\overline{\mathsf{A}}\mathsf{A} = 1$, dove 1 è la matrice identità. Da qui la tesi. ■

Corollario. *Se* $\boldsymbol{\tau} = \mathsf{A}\boldsymbol{\omega}$ *il determinante* $\det \mathsf{A}$ *non si annulla.*

Altrimenti la matrice inversa di A non esisterebbe.

Definizione. *Due terne non complanari* $\boldsymbol{\tau}$ *e* $\boldsymbol{\omega}$ *hanno la* ***stessa orientazione****, e si scrive* $\boldsymbol{\tau} \sim \boldsymbol{\omega}$, *se il determinante della matrice* A *tale che* $\boldsymbol{\tau} = \mathsf{A}\boldsymbol{\omega}$ *è positivo.*

Teorema. *La relazione* $\sim$ *è una relazione di equivalenza; inoltre se* $\boldsymbol{\sigma}$ *e* $\boldsymbol{\tau}$ *hanno orientazione diversa da* $\boldsymbol{\omega}$, *esse hanno la stessa orientazione.*

La prova è immediata, note le proprietà dei determinanti. Per queste proprietà, terne che non hanno la stesso orientazione sono dette avere orientazione **opposta**.

Queste definizioni permettono di stabilire un'orientazione dello spazio. Si sceglie arbitrariamente una terna base $\boldsymbol{\tau}$ e si chiama **orientazione positiva** quella di tutte le terne che hanno la stessa orientazione, e **orientazione negativa** quella opposta. Viene normalmente scelta l'orientazione positiva con la **regola della mano destra**. Sia O un punto nel palmo della mano destra, e stiano rispettivamente A, B e C sulla punta del pollice, dell'indice e del medio della stessa mano. Distendendo la mano in modo che i quattro punti non siano complanari si sceglie come terna base $\boldsymbol{\tau} = (\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}})$.

Notiamo che

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \sim (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}) \sim (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}),$$

e che $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ e $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$, p.es., hanno orientazioni opposte, così come $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ e $(-\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$, ecc.

3 Prodotto scalare

Definizione. *Dati due vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$, in cui $\boldsymbol{w} \neq 0$, si definisce **proiezione ortogonale** (o anche, semplicemente, **proiezione**) di $\boldsymbol{v}$ nella direzione di $\boldsymbol{w}$ il numero reale (scalare)*

$$v_{\|}(\boldsymbol{w}) = v \cos\theta,$$

dove θ è l'angolo convesso formato da due rappresentanti di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ originanti da uno stesso punto arbitrario O.

Molto spesso viene omessa la dipendenza da $\boldsymbol{w}$, se è chiara dal contesto. L'angolo θ è indipendente dal punto O, e può quindi essere chiamato **l'angolo fra $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$**.

La proiezione ortogonale ha la seguente interpretazione geometrica. Siano $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ rispettivamente due rappresentanti di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$. Sia H l'intersezione della retta $r = (\mathrm{OQ})$ con il piano ad essa perpendicolare e passante per P. H è detta la proiezione di P su r. Allora $|v_{\|}| = \overline{\mathrm{OH}}$ e il segno è positivo o negativo a seconda che $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ sia o meno concorde con $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$.

Teorema.

1. *La proiezione ortogonale nella direzione di un vettore fissato del prodotto $\lambda\boldsymbol{v}$, con λ reale, è pari al prodotto di λ per $v_{\|}$.*
2. *Inoltre la proiezione ortogonale della somma di due vettori è pari alla somma delle rispettive proiezioni ortogonali.*

Dimostrazione.

1. Se $\lambda = 0$ il risultato è banale. Se $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\lambda\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ e $\boldsymbol{w} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}$, l'angolo θ' fra $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ è uguale all'angolo θ fra $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ se $\lambda > 0$, e al suo supplementare se $\lambda < 0$. D'altra parte, indicando con H la proiezione di P su $r = (\mathrm{OM})$, e con K la corrispondente proiezione di Q, si ha $\overline{\mathrm{OQ}} = |\lambda|\overline{\mathrm{OP}}$. Otteniamo così

$$(\lambda v)_{\|} = \lambda v_{\|}.$$

2. La proiezione $a_{\|}$ di un vettore $\boldsymbol{a}$ nella direzione $\boldsymbol{w}$ si ottiene considerando il segmento orientato $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ rappresentativo di $\boldsymbol{a}$. Indichiamo con H la proiezione di P su $r = (\mathrm{OM})$, dove $\boldsymbol{w} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}$. Quindi $a_{\|}$ è la lunghezza di $\overline{\mathrm{OH}}$, presa con segno opportuno. Supponiamo adesso che $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$. Consideriamo $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \boldsymbol{u}$ e il vettore $\overrightarrow{\mathrm{QP}} = \boldsymbol{w}$. Sia K la proiezione di Q su r. Si ha allora $v_{\|} = \pm\overline{\mathrm{OK}}$, e d'altra parte, scegliendo K al posto di O, e considerando

il segmento orientato $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ rappresentativo di $\boldsymbol{w}$, si ha $w_\| = \pm\overline{\mathrm{KH}}$ (dove $\pm$ rappresenta i segni opportuni). Otteniamo così

$$a_\| = u_\| + v_\|.$$

■

Definizione. *Il **prodotto scalare** fra due vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$, denotato con $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$, è il numero reale che si ottiene moltiplicando la proiezione $v_\|(\boldsymbol{w})$ di $\boldsymbol{v}$ nella direzione di $\boldsymbol{w}$ per il modulo w di $\boldsymbol{w}$:*

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = vw\cos\theta,$$

dove θ è l'angolo fra $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$.

Teorema. *Il prodotto scalare possiede le seguenti proprietà:*

Commutatività: $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}$.

Linearità: $(\lambda\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w} = \lambda(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})$.

Distributività: $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})$.

Dimostrazione. **Commutatività:** è immediata dall'espressione algebrica del prodotto scalare.

Linearità: è evidente dalla definizione per $\lambda \geq 0$; per $\lambda < 0$, bisogna notare che l'angolo θ' fra $\lambda\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ è il supplementare dell'angolo θ fra $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$: $\theta' = \pi - \theta$, per cui si ha $\cos\theta' = -\cos\theta$. Otteniamo così, per $\lambda < 0$,

$$(\lambda\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w} = -|\lambda| v\, w\cos\theta = \lambda(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}).$$

Distributività: segue direttamente dalla distributività della proiezione ortogonale nella direzione di $\boldsymbol{w}$.

■

Il prodotto scalare di un vettore $\boldsymbol{v}$ con sé stesso è uguale al quadrato del suo modulo:

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = v^2.$$

In particolare, se il vettore $\boldsymbol{v}$ è il vettore nullo, questo prodotto si annulla. È vero anche il viceversa, perché l'unico vettore di modulo nullo è il vettore nullo.

Il coseno dell'angolo θ fra due vettori non nulli $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ può essere ottenuto dividendo il loro prodotto scalare per il prodotto dei loro moduli:

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}}{vw}.$$

In particolare, due vettori non nulli $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ sono paralleli se $|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}| = vw$, e sono ortogonali se $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$ si annulla.

4 Prodotto vettoriale e prodotto misto

Definizione. *Il **prodotto vettoriale** fra i vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ è definito da*

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = vw \sin\theta\, \boldsymbol{n},$$

dove θ è l'angolo compreso fra $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$, e $\boldsymbol{n}$ è il vettore di modulo 1, ortogonale al piano individuato da $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$, e tale che $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ e $\boldsymbol{n}$ (nell'ordine) formano una terna positivamente orientata.

In particolare, $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ si annulla se e solo se $\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{w}$ (ricordo che il vettore nullo è parallelo a qualunque vettore).

Definizione. *Il **prodotto misto** fra i vettori $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ è lo scalare definito dall'espressione*

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}).$$

In questa espressione, la parentesi è superflua, perché i prodotti scalare e vettoriale possono agire solo fra vettori, così che $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w}$ non avrebbe senso.

Teorema. *Il prodotto misto $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$ ha modulo pari al volume del parallelepipedo di spigoli* OA*,* OB *e* OC*, dove $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ e $\boldsymbol{w} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$, ed è positivo o negativo a seconda che $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ sia una terna positivamente o negativamente orientata.*

Si può anche dire che il prodotto misto è uguale al **volume con segno** del **parallelepipedo orientato** definito dalla terna $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$.

Dimostrazione. Notiamo che $|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}|$ è l'area del parallelogramma definito dai vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$, e che la direzione del prodotto vettoriale $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ è normale al piano individuato da questi vettori. Quindi la proiezione di $\boldsymbol{u}$ nella direzione di $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ è pari all'altezza h del parallelepipedo Π definito dai vettori $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$, in cui la base sta nel piano definito da $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$. Quindi $|\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})|$ è pari al volume del parallelepipedo Π, e che il prodotto misto è positivo o negativo secondo che i vettori $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ formano una terna positivamente o negativamente orientata. ■

Corollario. *Nel prodotto misto $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$, i segni del prodotto scalare e vettoriale possono essere scambiati:*

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}.$$

Dimostrazione. L'espressione a secondo membro è uguale, per la commutatività del prodotto scalare, a

$$\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v},$$

che rappresenta il volume dello stesso parallelepipedo (stavolta con la base identificata da $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$), e in cui la terna $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ ha la stessa orientazione di $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$. ■

Teorema. *Il prodotto vettoriale $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ possiede le seguenti proprietà:*

Anticommutatività: $\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{v} = -(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$.

Linearità: $(\lambda \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = \lambda(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$.

Distributività: $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w})$.

Dimostrazione. **Anticommutatività:** è immediata dalla definizione: infatti invertendo l'ordine dei fattori deve anche cambiare il verso di $\boldsymbol{n}$.

Linearità: è immediata per $\lambda \geq 0$. Per $\lambda < 0$, se $\theta' = \pi - \theta$ è l'angolo fra $\lambda\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$, si ha evidentemente $\sin\theta' = \sin\theta$; però il verso di $\boldsymbol{n}$ deve essere invertito per mantenere la positività dell'orientamento della terna.

Distributività: Definiamo il vettore

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) - (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}).$$

Vogliamo dimostrare che questo vettore è identicamente nullo. Per farlo, mostreremo che il prodotto scalare di $\boldsymbol{d}$ con un vettore arbitrario $\boldsymbol{a}$ si annulla. Si ha infatti, sfruttando la distributività del prodotto scalare:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d} &= \boldsymbol{a} \cdot [\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) - (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w})] \\ &= \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) - \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}). \end{aligned}$$

Possiamo adesso sfruttare lo scambio dei segni nel prodotto misto per trasformare questa espressione:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d} &= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} \\ &= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = 0, \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato ancora una volta la distributività del prodotto scalare. Ora, poiché $\boldsymbol{a}$ è arbitrario, possiamo anche scegliere $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{d}$. Ne segue che il prodotto scalare di $\boldsymbol{d}$ con sé stesso si annulla, e quindi che $\boldsymbol{d}$ è nullo.

■

Teorema. *Il prodotto vettoriale soddisfa l'**identità di Jacobi**:*

$$\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) + \boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{w} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = 0.$$

Dimostrazione. Se i tre vettori non sono complanari, ogni vettore arbitrario $\boldsymbol{a}$ può essere scritto nella forma

$$\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} + \gamma\boldsymbol{w},$$

con certi scalari (α, β, γ). Mostriamo adesso che il prodotto scalare di un vettore arbitrario $\boldsymbol{a}$ con il vettore

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) + \boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{w} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}),$$

si annulla. Per quanto abbiamo detto, sarà sufficiente mostrare che il prodotto scalare di $\boldsymbol{d}$ con ciascuno dei vettori $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ si annulla. Considerando p.es., il caso di $\boldsymbol{u}$, si ha

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{d} &= \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \\ &= (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}) \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = 0, \end{aligned}$$

perché $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = 0$ e per l'anticommutatività del prodotto vettoriale. Allo stesso modo si ragiona per gli altri vettori.

Se i tre vettori sono complanari, il vettore $\boldsymbol{d}$ è complanare con essi, perché ogni termine è ortogonale al prodotto vettoriale di due fra essi. Ogni vettore $\boldsymbol{a}$ può essere scritto nella forma, p.es., $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} + \gamma\boldsymbol{t}$, dove $\boldsymbol{t}$ è ortogonale al piano dei tre vettori. Il prodotto scalare di $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ con $\boldsymbol{d}$ si annulla per quanto visto prima, e quello di $\boldsymbol{t}$ con $\boldsymbol{d}$ si annulla perché sono ortogonali.

In conclusione il prodotto scalare di $\boldsymbol{d}$ con un vettore arbitrario $\boldsymbol{a}$ si annulla sempre, e quindi $\boldsymbol{d}$ è nullo. ■

Teorema. *Il **doppio prodotto vettoriale** $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$ ha per espressione*

$$\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w} - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v}.$$

Dimostrazione. Il doppio prodotto vettoriale deve essere perpendicolare al vettore $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$, che è perpendicolare al piano individuato da $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$. Quindi esso ammette l'espressione

$$\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{v} - \beta\boldsymbol{w},$$

per una qualche coppia di scalari (α, β). Valutandone il prodotto scalare con $\boldsymbol{u}$ si ottiene

$$0 = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a} = \alpha(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) - \beta(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}).$$

Quindi

$$\frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\beta} = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}}{\alpha} = f,$$

dove f è uno scalare che dipende da $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$. Quindi si ha

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \frac{1}{f}\left[(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w} - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v}\right].$$

Ambo i membri di questa equazione sono lineari in ciascuno dei vettori $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$. Quindi f deve essere costante. Per valutare questa costante, poniamo $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ e supponiamo che $\boldsymbol{w}$ sia ortogonale a $\boldsymbol{u}$. Otteniamo

$$\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}) = \frac{1}{f}u^2\boldsymbol{w}.$$

D'altra parte si ha $|\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w})| = u^2 w$. Otteniamo così $f = 1$. ■

5 Rappresentazione cartesiana

Definizione. *Un **versore** è un vettore di modulo pari a 1.*

Definizione. *Dato un vettore non nullo $\mathbf{v}$, il **versore corrispondente**, indicato con $\hat{\mathbf{v}}$, è il versore parallelo a $\mathbf{v}$ e concorde con esso:*

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{v}}{v}.$$

Definizione. *Una **terna fondamentale** o **base** è una terna $\tau = (\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ di versori ortogonali fra loro e positivamente orientata.*

Teorema. *In una terna fondamentale, si hanno le seguenti relazioni:*

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j = \delta_{ij},$$

dove δ_{ij} è la delta di Kronecker, e

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i \times \hat{\boldsymbol{e}}_j = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\hat{\boldsymbol{e}}_k,$$

dove ϵ_{ijk} è il simbolo di Levi-Civita, definito da

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{se } (ijk) \text{ è una permutazione concorde con (123);} \\ -1, & \text{se } (ijk) \text{ è una permutazione discorde con (123);} \\ 0, & \text{se due o più degli indici } i,\ j,\ k \text{ sono uguali.} \end{cases}$$

Dimostrazione. È sufficiente applicare le definizioni. ■

Spesso si usano le notazioni $\boldsymbol{i} = \hat{\boldsymbol{e}}_1$, $\boldsymbol{j} = \hat{\boldsymbol{e}}_2$, $\boldsymbol{k} = \hat{\boldsymbol{e}}_3$. Si hanno allora le relazioni:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1; \\
&\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0; \\
&\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}; \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}; \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}.
\end{aligned}$$

Definizione. *Dato il vettore $\boldsymbol{v}$ e la terna fondamentale $\boldsymbol{\tau} = (\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3)$, i coefficienti che appaiono nell'espressione*

$$\boldsymbol{v} = v_1 \hat{\boldsymbol{e}}_1 + v_2 \hat{\boldsymbol{e}}_2 + v_3 \hat{\boldsymbol{e}}_3,$$

sono chiamati le ***componenti*** *di $\boldsymbol{v}$ rispetto a $\boldsymbol{\tau}$.*

Teorema. *La corrispondenza fra i vettori $\boldsymbol{v}$ e le terne di componenti (v_1, v_2, v_3), a terna fondamentale $\boldsymbol{\tau}$ fissata, è biunivoca.*

Dimostrazione. Si tratta di un caso particolare della proprietà che vale per qualunque terna di vettori non complanari. ■

D'ora in poi, salvo avviso contrario, supporremo che sia stata scelta e fissata una terna fondamentale $\boldsymbol{\tau}$. Potremo quindi parlare, p.es., delle componenti di un vettore $\boldsymbol{v}$ senza ulteriori specificazioni. Possiamo quindi considerare che un vettore $\boldsymbol{v}$ è rappresentato dalla terna (v_1, v_2, v_3) delle sue componenti, e scrivere $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Si ottengono facilmente i seguenti risultati, di cui omettiamo la dimostrazione:

Teorema. *Siano dati $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Si ha allora*

$$\begin{aligned}
\lambda \boldsymbol{v} &= (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3); \\
\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} &= (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3).
\end{aligned}$$

Sfruttando le proprietà della terna fondamentale, e le proprietà dei prodotti scalare, vettoriale e misto, si ottiene inoltre:

Teorema. *Siano dati $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Si ha allora*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} &= v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3; \\
\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} &= (v_2 w_3 - v_3 w_2) \hat{\boldsymbol{e}}_1 + (v_3 w_1 - v_1 w_3) \hat{\boldsymbol{e}}_2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1) \hat{\boldsymbol{e}}_3; \\
\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} &= \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3 \\ v_1, & v_2, & v_3 \\ w_1, & w_2, & w_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Notiamo che l'espressione del prodotto vettoriale può anche essere scritta simbolicamente

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_1, & \hat{\boldsymbol{e}}_2, & \hat{\boldsymbol{e}}_3 \\ v_1, & v_2, & v_3 \\ w_1, & w_2, & w_3 \end{vmatrix}.$$

Inoltre, in particolare, il modulo quadro di un vettore $\boldsymbol{v}$ ha per espressione

$$v^2 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2.$$

Quindi
$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2},$$
dove si conviene di scegliere la determinazione non negativa.

Da queste espressioni è facile vedere che la componente v_i del vettore $\boldsymbol{v}$ è uguale al prodotto scalare di $\boldsymbol{v}$ con $\hat{\boldsymbol{e}}_i$:
$$v_i = \boldsymbol{v} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$
In particolare, se $\hat{\boldsymbol{v}}$ è un versore, si ha $v_i = \cos\theta_i$, dove θ_i è l'angolo fra $\hat{\boldsymbol{v}}$ e $\hat{\boldsymbol{e}}_i$. Le componenti di un versore sono quindi chiamate **coseni direttori**.

6 Cambiamento di base

Siano $\boldsymbol{\tau} = (\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3)$ e $\boldsymbol{\tau}' = (\hat{\boldsymbol{e}}_1', \hat{\boldsymbol{e}}_2', \hat{\boldsymbol{e}}_3')$ due basi. Si ha allora
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}' &= \mathsf{A}\boldsymbol{\tau}; \\ \boldsymbol{\tau} &= \mathsf{A}^{-1}\boldsymbol{\tau}'. \end{aligned}$$
Inoltre, dato che, com'è facile vedere, si ha
$$\hat{\boldsymbol{e}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_2 \times \hat{\boldsymbol{e}}_3 = \hat{\boldsymbol{e}}_1' \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_2' \times \hat{\boldsymbol{e}}_3' = 1,$$
otteniamo
$$\det \mathsf{A} = \det \mathsf{A}^{-1} = 1.$$
Si ha inoltre
$$a_{ij} = \cos\theta_{ij} = a_{ji}^{-1},$$
dove θ_{ij} è l'angolo fra $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ e $\hat{\boldsymbol{e}}_j'$. Quindi
$$\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}^{\mathsf{T}},$$
dove A^{T} è la matrice trasposta di A. Una matrice che possiede questa proprietà è detta **ortogonale**. Sia adesso $\boldsymbol{v}$ un vettore tale che
$$\boldsymbol{v} = v_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + v_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + v_3\hat{\boldsymbol{e}}_3.$$
Definiamo (v_1', v_2', v_3') mediante la relazione
$$\boldsymbol{v} = v_1'\hat{\boldsymbol{e}}_1' + v_2'\hat{\boldsymbol{e}}_2' + v_3'\hat{\boldsymbol{e}}_3'.$$
Poiché
$$\hat{\boldsymbol{e}}_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}^{-1}\hat{\boldsymbol{e}}_j',$$
otteniamo
$$v_j' = \sum_{i=1}^{3} v_i a_{ij}^{-1} = \sum_{i=1}^{3} a_{ji} v_i.$$
Definendo $\boldsymbol{v}$ mediante i vettori *colonna* $\mathsf{V}_{\boldsymbol{\tau}} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\mathsf{V}_{\boldsymbol{\tau}'} = (v_1', v_2', v_3')$ otteniamo
$$\mathsf{V}_{\boldsymbol{\tau}'} = \mathsf{A}\mathsf{V}_{\boldsymbol{\tau}}.$$
Abbiamo così ottenuto la regola che definisce il cambiamento di base. Possiamo generalizzare la trasformazione al caso in cui $\boldsymbol{\tau}$ e $\boldsymbol{\tau}'$ non abbiano la stessa orientazione. In questo caso tutte le relazioni rimangono vere, tranne che $\det \mathsf{A} = \det \mathsf{A}^{\mathsf{T}} = -1$.

La matrice A dipende da nove parametri (a_{ij}). Tuttavia la condizione $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A} = \mathsf{1}$ impone sei condizioni indipendenti (le condizioni sono solo sei perché il prodotto $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$ è una matrice simmetrica). Quindi la matrice ortogonale A può essere espressa in funzione di tre parametri indipendenti. Indicandoli con θ, ϕ e ψ, ognuno compreso fra 0 e 2π (gli **angoli di Eulero**), si ottiene l'espressione seguente:

$$\mathsf{A}(\theta,\phi,\psi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi, & -\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\sin\theta\cos\psi, & \sin\phi\sin\psi + \cos\phi\sin\theta\cos\psi \\ \cos\theta\sin\psi, & \cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\theta\sin\psi, & -\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\theta\sin\psi \\ -\sin\theta, & \sin\phi\cos\theta, & \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Si può verificare che questa espressione può essere ottenuta mediante il seguente prodotto fra matrici:

$$\mathsf{A}(\theta,\phi,\psi) = \mathsf{R}_3(\psi)\mathsf{R}_2(\theta)\mathsf{R}_1(\phi),$$

dove

$$\begin{aligned} \mathsf{R}_1(\phi) &= \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & \cos\phi, & -\sin\phi \\ 0, & \sin\phi, & \cos\phi \end{pmatrix}; \\ \mathsf{R}_2(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos\theta, & 0, & \sin\theta \\ 0, & 1, & 0 \\ -\sin\theta, & 0, & \cos\theta \end{pmatrix}; \\ \mathsf{R}_3(\psi) &= \begin{pmatrix} \cos\psi, & -\sin\psi, & 0 \\ \sin\psi, & \cos\psi, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

sono matrici che rappresentano rotazioni rispettivamente attorno all'asse 1, 2 e 3. Per ognuna di queste matrici vale la relazione

$$\mathsf{R}_i^{-1}(\theta) = \mathsf{R}_i^\mathsf{T}(\theta) = \mathsf{R}_i(-\theta).$$

È da notare che esistono diverse forme equivalenti per parametrizzare la matrice A.