

Sistemi con massa variabile

Luca Peliti

16 Settembre 2007

In effetti la forma della legge di Newton che noi abbiamo considerato,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}, \quad (1)$$

non è identica a quella definita da Newton stesso nei *Principia*. La forma di Newton mette in relazione la forza \mathbf{f} con la *variazione della quantità di moto* \mathbf{p} . Si ha infatti

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{f}. \quad (2)$$

La (2) implica la (1) se la massa del corpo studiato è costante. Tuttavia esistono delle situazioni in cui la massa può variare. Anzi, la teoria della relatività ristretta implica che la massa di *qualsunque* corpo dipende dalla sua velocità v , secondo la legge

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (3)$$

dove m_0 è la **massa a riposo** del corpo (cioè la massa che esso possiede quando la sua velocità è nulla), e c è la velocità della luce. È chiaro che la variazione di massa così ottenuta è trascurabile, tranne quando le velocità in gioco sono dell'ordine di c . In effetti, questa variazione di masse viene osservata nei raggi cosmici e negli acceleratori di particelle. Tuttavia una discussione di questo effetto richiede di considerare la dinamica relativistica, cosa che esula dal nostro programma.

D'altra parte la (2) si applica anche a situazioni molto più vicine a noi: in effetti essa non è altro che la prima equazione cardinale del moto dei sistemi, e può essere applicata senza problemi tutte le volte che il sistema che stiamo considerando può essere trattato come un punto materiale, la cui posizione coincide con quella del suo centro di massa.

Consideriamo per esempio un'annaffiatrice che si muove a velocità costante v su una strada orizzontale, spruzzando una quantità di acqua pari a μ (in kg/s) per unità di tempo. Supponiamo che l'acqua venga spruzzata orizzontalmente dal retro, a una velocità $-q$ se vista dall'annaffiatrice, $v - q$ se vista dalla strada.

Applichiamo adesso la prima equazione cardinale al sistema. Dobbiamo tenere conto non solo della diminuzione di massa dell'annaffiatrice, ma anche della variazione di quantità di moto dell'acqua che viene spruzzata. Mettendoci nel sistema di riferimento della strada, con l'asse x nella direzione del moto dell'annaffiatrice, otteniamo

$$\dot{p} = \frac{d}{dt}(mv) + \mu(v - q) = f. \quad (4)$$

Supponiamo adesso che la risultante delle forze applicate all'annaffiatrice (potenza del motore, attrito con il terreno, resistenza dell'aria, ecc.) si annulli. Otteniamo

$$\dot{m}v + m\dot{v} = \mu(q - v),$$

per cui, dato che $\dot{m} = -\mu$,

$$m\dot{v} = \mu q. \quad (5)$$

Quindi l'effetto dell'acqua spruzzata corrisponde all'applicazione di una forza di intensità pari alla massa spruzzata nell'unità di tempo per la velocità relativa con cui essa viene spruzzata.

A questo punto possiamo applicare lo stesso ragionamento ad altri casi, come ai razzi, o ai motori a reazione. Otteniamo così che la **spinta** di un motore a reazione che espelle una massa μ nell'unità di tempo, a una velocità relativa pari a \mathbf{v}_{rel} è data da

$$\mathbf{F} = \mu \mathbf{v}_{\text{rel}}. \quad (6)$$

Come applicazione, supponiamo di voler calcolare l'incremento di velocità subito da un razzo. Indichiamo con M_0 la massa iniziale del razzo, con M_f la sua massa finale, e con V la velocità relativa con cui espelle i gas dal motore. Indichiamo con μ la quantità di massa espulsa nell'unità di tempo. Allora la forza che agisce sul razzo è pari a

$$F = \mu V, \quad (7)$$

e la sua accelerazione è data da

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\mu}{M} V = -\frac{\dot{M}}{M} V = -\frac{d \log M}{M} V. \quad (8)$$

Integrando, otteniamo

$$v_f - v_0 = -V \log \frac{M_f}{M_0} = V \log \frac{M_0}{M_f}. \quad (9)$$

Quindi la quantità che determina l'accelerazione totale del razzo è il **rapporto di massa** M_0/M_f fra la massa iniziale e quella finale.