

Sistemi di punti materiali

L. P.

15 Agosto 2007

1. Introduzione

In questi appunti, discuteremo il comportamento di sistemi di punti materiali in interazione. Vedremo come è possibile descrivere, in certi casi, i tratti salienti del comportamento di un sistema mediante delle quantità “globali”, e prevederne il comportamento mediante delle semplici leggi. Queste leggi sono collegate a delle relazioni di conservazione di validità generale. Si tratta in particolare della conservazione della **quantità di moto totale**, del **momento della quantità di moto** (o **momento angolare**) totale, e dell'**energia meccanica totale**.

2. Quantità di moto totale

Consideriamo un sistema costituito da N punti materiali (o particelle), identificati dall'indice i ($i = 1, 2, \dots, N$). Indichiamo con m_i la massa della particella i . Ciascuna delle particelle è sottoposta a delle interazioni con le altre particelle del sistema, e a delle forze esterne. Quindi la forza totale \mathbf{f}_i che agisce sulla particella i può essere scomposta nella somma delle forze *interne* e nella forza *esterna* che agiscono su di essa:

$$\mathbf{f}_i = \sum_{j (\neq i)}' \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_i^{\text{ext}}. \quad (1)$$

In questa espressione, \mathbf{f}_{ij} è la forza dovuta alla particella j che agisce sulla particella i , mentre $\mathbf{f}_i^{\text{ext}}$ è la risultante delle forze esterne che agiscono sulla particella i . La somma è estesa alle particelle j appartenenti al sistema, e diverse dalla particella i .

Per la legge di Newton, l'accelerazione $\ddot{\mathbf{r}}_i$ della particella i è espressa da

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{f}_i. \quad (2)$$

Indicando con $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ la quantità di moto della particella i , otteniamo un'altra espressione della legge di Newton:

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{f}_i. \quad (3)$$

Introduciamo adesso la **quantità di moto totale** del sistema, definita da

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i. \quad (4)$$

Sommando ambo i membri della (3) rispetto a i da 1 a N otteniamo

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i = \sum_{i=1}^N \sum'_{j(\neq i)} \mathbf{f}_{ij} + \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^{\text{ext}}. \quad (5)$$

Notiamo che la doppia somma può essere riarrangiata nella maniera seguente:

$$\sum_{i=1}^N \sum'_{j(\neq i)} \mathbf{f}_{ij} = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N (\mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ji}). \quad (6)$$

Ora, per la terza legge di Newton, la forza che la particella j esercita sulla particella i è opposta a quella che la particella i esercita sulla particella j :

$$\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}, \quad \forall ij, \quad (i \neq j). \quad (7)$$

Quindi, per ogni coppia (ij) di particelle, la somma $(\mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ji})$ si annulla. Di conseguenza la doppia somma si annulla, ed otteniamo

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^{\text{ext}}. \quad (8)$$

Abbiamo così ottenuto questo importante risultato:

La derivata $\dot{\mathbf{P}}$ della quantità di moto totale di un sistema di punti materiali rispetto al tempo è uguale alla risultante $\mathbf{F}^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^{\text{ext}}$ delle forze esterne applicate al sistema.

Ne segue come corollario la seguente **legge di conservazione della quantità di moto**:

Se un sistema di punti materiali è isolato (cioè non è sottoposto all'azione di corpi esterni) la quantità di moto totale \mathbf{P} è costante nel tempo.

Vorrei sottolineare che questo risultato è *totalmente indipendente dalle proprietà delle forze che agiscono fra le particelle del sistema*. Queste forze possono essere conservative o non conservative, ecc.‡ Notiamo inoltre che la legge di conservazione è di natura vettoriale: la quantità di moto totale \mathbf{P} rimane costante in modulo, direzione e verso, o in maniera equivalente, ciascuna delle sue componenti P_x , P_y e P_z si conserva separatamente.

Consideriamo un sistema isolato di particelle, e supponiamo di suddividerlo mentalmente in due sottosistemi, indicati con (1) e (2). Allora la quantità di moto totale \mathbf{P} sarà uguale alla somma delle quantità di moto totali di ciascuno dei due sottosistemi:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \sum_{i \in (1)} \mathbf{p}_i + \sum_{j \in (2)} \mathbf{p}_j = \mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(2)}. \quad (9)$$

Poiché la derivata totale di \mathbf{P} rispetto al tempo si annulla, si ha

$$\dot{\mathbf{P}}^{(1)} = -\dot{\mathbf{P}}^{(2)}. \quad (10)$$

‡ In effetti, sebbene la nostra derivazione abbia supposto che le forze agiscano solo fra coppie di particelle, il risultato è valido anche nel caso generale, anche in presenza di interazioni fra tre o più corpi.

D'altra parte, per ciascuno dei sottosistemi, si ha

$$\dot{\mathbf{P}}^{(1)} = \mathbf{F}^{\text{ext},(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (11)$$

dove $\mathbf{F}^{\text{ext},(\alpha)}$ è la risultante delle forze esterne che agiscono sul sistema (α) . Quindi, nelle nostre ipotesi, si ha

$$\mathbf{F}^{\text{ext},(1)} = -\mathbf{F}^{\text{ext},(2)}. \quad (12)$$

Ma, nel nostro caso, $\mathbf{F}^{\text{ext},(1)}$ è dovuto all'azione del sistema (2) (e viceversa). Quindi la legge di Newton di azione e reazione vale anche fra sistemi:

La risultante $F^{(\alpha),(\beta)}$ delle forze agenti sul sistema (α) dovute alle particelle del sistema (β) è opposta alla risultante $F^{(\beta),(\alpha)}$ delle forze agenti sul sistema (β) dovute alle particelle del sistema (α) .

Questo risultato può essere ottenuto anche valutando esplicitamente $F^{(\alpha),(\beta)}$ e $F^{(\beta),(\alpha)}$, ed applicandola terza legge di Newton. Esso permette, entro certi limiti, di discutere della dinamica di sistemi come se fossero dei punti materiali. Per farlo in maniera più esplicita, è necessario introdurre delle quantità che permettano di descrivere il moto “globale” di un sistema di punti materiali.

3. Centro di massa

Consideriamo un sistema di N punti materiali, nella situazione in cui il corpo i di massa m_i si trova nella posizione individuata dal raggio vettore \mathbf{r}_i ed è animato dalla velocità \mathbf{v}_i . La massa totale del sistema vale

$$M = \sum_{i=1}^N m_i. \quad (13)$$

Definiamo adesso il **centro di massa** del sistema come il punto geometrico di raggio vettore \mathbf{r}_{cm} , dove

$$\mathbf{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i. \quad (14)$$

Notiamo alcune proprietà interessanti del centro di massa:

- Il centro di massa è “dentro” il sistema. Più in particolare, se π è un qualunque piano che lascia da una certa parte tutti i punti del sistema, allora \mathbf{r}_{cm} giace da quella parte di π . Supponiamo infatti che π sia definito dall'equazione

$$ax + by + cz = d,$$

con un certo insieme di coefficienti (a, b, c, d) , e che, per esempio, si abbia, per ogni $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$,

$$ax_i + by_i + cz_i > d, \quad \forall i.$$

Allora è facile vedere che, per $\mathbf{r}_{\text{cm}} = (x_{\text{cm}}, y_{\text{cm}}, z_{\text{cm}})$ si ha

$$ax_{\text{cm}} + by_{\text{cm}} + cz_{\text{cm}} > d.$$

- Se la distribuzione delle particelle del sistema ha degli elementi (un piano, un asse, o addirittura un centro) di simmetria, il centro di massa giace su quell'elemento. Per fissare le idee, consideriamo il caso di un asse di simmetria. Senza perdere di generalità, possiamo far coincidere l'asse z del nostro sistema di riferimento cartesiano con quell'asse. L'asse z è un asse di simmetria se esistono delle rotazioni attorno a quest'asse, tali che la distribuzione "ruotata" delle particelle è uguale a quella di partenza. Consideriamo, p.es., il caso delle rotazioni di 180° . Allora per ogni punto materiale di massa m_i posto nel punto $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ corrisponde un punto di uguale massa, posto nel punto $\mathbf{r}'_i = (-x_i, -y_i, z_i)$. Allora, sommando su i , è evidente che $x_{\text{cm}} = y_{\text{cm}} = 0$, cioè che \mathbf{r}_{cm} appartiene all'asse z . Con lo stesso ragionamento si ottiene il risultato per il caso di rotazioni di 120° , ecc.
- D'altra parte, non è detto che nel centro di massa sia presente un punto materiale del sistema. Supponiamo per esempio che il sistema sia costituito da sei particelle di massa identica m , disposte ai vertici di un esagono regolare. Il sistema possiede un piano di simmetria (che possiamo far coincidere con il piano xy) e un asse di simmetria (che possiamo far coincidere con l'asse z). Il sistema è invariante rispetto a rotazioni di 60° e loro multipli, quindi il centro di massa deve appartenere al piano xy (per la simmetria rispetto a questo piano, o, se vogliamo, perché deve essere al disotto di ogni piano $z = d$, con $d > 0$, e al disopra di ogni simile piano con $d < 0$), e all'asse z , e quindi sta nell'origine. Ma nell'origine non c'è nessun punto materiale del sistema.

Ciò che rende interessante il centro di massa è il seguente risultato:

La quantità di moto totale \mathbf{P} di un sistema di particelle è uguale a quella di un punto materiale di massa M pari alla massa totale del sistema, animato dalla velocità $\dot{\mathbf{r}}_{\text{cm}}$ del centro di massa.

Per ottenere questo risultato, deriviamo l'equazione (14) rispetto al tempo:

$$\dot{\mathbf{r}}_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{M} \mathbf{P}. \quad (15)$$

Quindi

$$\mathbf{P} = M \dot{\mathbf{r}}_{\text{cm}}, \quad (16)$$

come volevamo dimostrare.

Ne segue, in particolare, che il centro di massa di un sistema isolato si muove di moto rettilineo uniforme. In questo caso, la descrizione del sistema diventa spesso più semplice se si sceglie un sistema di riferimento cartesiano solidale con il centro di massa, cioè in cui $\dot{\mathbf{r}}_{\text{cm}} = 0$. Più in generale, il moto del centro di massa obbedisce a una sorta di seconda legge di Newton, in cui compare solo la risultante delle forze esterne:

$$M \ddot{\mathbf{r}}_{\text{cm}} = \mathbf{F}^{\text{ext}}. \quad (17)$$

Consideriamo per esempio il seguente problema:

Esercizio. Un cannone spara un proiettile con una velocità iniziale V_0 ad un angolo θ rispetto all'orizzonte. Dopo un certo tempo τ , il proiettile esplose. Determinare la traiettoria del centro di massa, fin tanto che nessuno dei frammenti del proiettile tocca il suolo.

Soluzione. Se il proiettile non esplodesse, percorrerebbe una traiettoria parabolica determinata dalla sua velocità iniziale e dall'accelerazione di gravità. Questa traiettoria si ottiene risolvendo l'equazione del moto

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g},$$

dove \mathbf{r} è la posizione del proiettile, e \mathbf{g} è l'accelerazione di gravità. La soluzione di questa equazione differenziale, posto $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$, è data da

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{V}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2.$$

Ponendo il cannone nell'origine, e facendolo giacere nel piano xz , le coordinate della velocità iniziale sono date da $\mathbf{V}_0 = (V_0 \cos \theta, 0, V_0 \sin \theta)$. L'accelerazione di gravità ha per coordinate $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$, per cui la legge oraria del moto per il proiettile inesploso è data da

$$\begin{aligned} x(t) &= V_0 t \cos \theta; \\ y(t) &= 0; \\ z(t) &= V_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2. \end{aligned}$$

Eliminando t fra le equazioni per x e z otteniamo l'equazione della traiettoria:

$$z = x \tan \theta - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{V_0^2 \cos^2 \theta}, \quad y = 0.$$

Ora, in questo caso, *il centro di massa segue la stessa traiettoria*, anche dopo l'esplosione, almeno finché nessuno dei frammenti tocca il terreno. Infatti il centro di massa si muove inizialmente della velocità \mathbf{V}_0 , ed obbedisce alla "legge di Newton"

$$M \ddot{\mathbf{r}}_{\text{cm}} = \mathbf{F}^{\text{ext}},$$

tanto prima che dopo l'esplosione (in cui agiscono solo forze interne al sistema). Ma nel nostro caso, se nessuno dei frammenti tocca il suolo, su ciascuno di essi agisce solo la forza-peso $m_i \mathbf{g}$, per cui

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} = \sum_i m_i \mathbf{g} = M \mathbf{g}.$$

Quindi il moto del centro di massa è governato dall'equazione

$$M \ddot{\mathbf{r}}_{\text{cm}} = M \mathbf{g},$$

che abbiamo appena risolto.

Notiamo un'altra proprietà interessante del centro di massa. Consideriamo un sistema di N particelle, e suddividiamolo mentalmente in due sottosistemi, (1) e (2), di massa totale pari rispettivamente a $M^{(1)}$ e $M^{(2)}$, e sia $\mathbf{r}_{\text{cm}}^{(1)}$ la posizione del centro di massa di (1), e $\mathbf{r}_{\text{cm}}^{(2)}$ la corrispondente di (2). Allora la posizione del centro di massa totale è semplicemente data da

$$\mathbf{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M^{(1)} + M^{(2)}} \left(M^{(1)} \mathbf{r}_{\text{cm}}^{(1)} + M^{(2)} \mathbf{r}_{\text{cm}}^{(2)} \right). \quad (18)$$

In altri termini, per valutare la posizione del centro di massa, siamo liberi di “raggruppare” assieme sottosistemi del sistema considerato, e di sostituirli mentalmente con punti materiali di massa pari alla massa totale del sottosistema, e posti nel centro di massa del sottosistema stesso. Questo permette di risolvere esplicitamente problemi come il seguente.

Esercizio. Un uomo di massa $m_1 = 70$ kg sta su una zattera di massa $m_2 = 210$ kg, posta in un bacino calmo. A un certo punto l'uomo si mette a camminare lentamente verso E. Valutare il suo spostamento rispetto al bacino dopo che l'uomo si è spostato di 3.6 m rispetto alla zattera.

Soluzione. In questo caso, la menzione della “zattera” serve a fare considerare il sistema come isolato. In effetti il sistema è sottoposto a un gran numero di forze, fra cui la forza-peso, la spinta di Archimede, ecc. Tuttavia le forze esterne si equilibrano reciprocamente (il sistema sta inizialmente fermo all'equilibrio) tranne eventualmente la resistenza dell'acqua allo spostamento della zattera. Però, se tale spostamento avviene lentamente, questa resistenza, essendo proporzionale alla velocità, può essere trascurata (questo non sarebbe ovviamente il caso se la zattera fosse in secca, perché l'attrito fra solidi è indipendente dalla velocità). Per questo si richiede che l'uomo cammini lentamente. Con queste premesse, il centro di massa del sistema uomo+zattera rimane fermo. Noi non conosciamo la sua posizione, ma il problema richiede solo di valutare lo spostamento $\Delta \mathbf{r}_1$ dell'uomo rispetto al sistema di riferimento del bacino. Quando l'uomo si sposta, anche la zattera subirà uno spostamento $\Delta \mathbf{r}_2$. Ora, lo spostamento del centro di massa è dato da

$$\Delta \mathbf{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 \Delta \mathbf{r}_1 + m_2 \Delta \mathbf{r}_2).$$

Ponendo questo spostamento uguale a zero, otteniamo una prima relazione. Una seconda relazione si ottiene tenendo conto che conosciamo lo spostamento relativo $\Delta \mathbf{r}$ dell'uomo rispetto alla zattera: disponendo l'asse delle x in direzione E, si ha $\Delta \mathbf{r} = (3.6 \text{ m}, 0, 0)$. Ora, si ha

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r}_1 - \Delta \mathbf{r}_2.$$

Eliminando $\Delta \mathbf{r}_2$ fra queste due relazioni, otteniamo

$$\Delta \mathbf{r}_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \Delta \mathbf{r} = (0.9 \text{ m}, 0, 0).$$

4. Momento angolare totale

Consideriamo di nuovo un sistema costituito da N punti materiali (o particelle), identificati dall'indice i ($i = 1, 2, \dots, N$). Indichiamo con m_i la massa della particella i , e supponiamo che essa sia posta nel punto di raggio vettore \mathbf{r}_i rispetto all'origine O , e sia animata dalla velocità $\dot{\mathbf{r}}_i$. Allora il momento angolare (o momento della quantità di moto) della particella i rispetto a O è dato dal prodotto vettoriale del raggio vettore \mathbf{r}_i della particella per la quantità di moto $m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ della particella stessa:

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i. \quad (19)$$

Il **momento angolare totale** di un sistema di particelle rispetto all'origine è dato dalla somma dei momenti angolari delle singole particelle:

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i. \quad (20)$$

Il momento angolare totale obbedisce a una legge di conservazione analoga a quella della quantità di moto totale, e che discende anche essa dalla terza legge di Newton. Secondo Newton, in effetti, la forza \mathbf{f}_{ij} con cui una particella j agisce su una particella i , non solo è l'opposta della forza \mathbf{f}_{ji} con cui la particella i agisce sulla particella j , ma è anche parallela alla congiungente $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ dei due corpi. D'altra parte, la derivata $\dot{\mathbf{M}}_i$ del momento angolare della particella i rispetto al tempo è uguale al momento della forza risultante applicata alla particella stessa:

$$\dot{\mathbf{M}}_i = \mathbf{r}_i \times \left[\sum_{j(\neq i)} \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_i^{\text{ext}} \right]. \quad (21)$$

Per valutare la derivata rispetto al tempo del momento angolare totale, sommiamo ambo i membri di questa relazione rispetto a i . Otteniamo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \left[\sum_{j(\neq i)} \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_i^{\text{ext}} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ji}) + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i^{\text{ext}} \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \mathbf{f}_{ij} + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i^{\text{ext}}. \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio, abbiamo sfruttato il fatto che $\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}$. Ma, poiché per la terza legge di Newton, \mathbf{f}_{ij} è parallela a $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, ciascuno dei termini della doppia somma si annulla. Otteniamo così

$$\dot{\mathbf{M}} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{f}_i^{\text{ext}}. \quad (22)$$

Abbiamo così ottenuto il seguente risultato:

La derivata del momento angolare di un sistema di particelle rispetto al tempo è uguale alla risultante dei momenti delle forze esterne.

Abbiamo ottenuto questo risultato supponendo che i momenti angolari e i momenti delle forze siano presi tutti rispetto all'origine. Tuttavia, poiché l'origine può essere scelta in maniera arbitraria, è facile vedere che lo stesso risultato vale anche se valutiamo i momenti rispetto a un qualunque punto P, fisso rispetto al nostro sistema di coordinate. In effetti, un calcolo esplicito mostra che, se \mathbf{M} è il momento angolare totale valutato rispetto all'origine, e \mathbf{M}_P quello valutato rispetto al punto P, si ha

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_P + \mathbf{r}_P \times \mathbf{P}, \quad (23)$$

dove \mathbf{r}_P è il raggio vettore di P rispetto all'origine e \mathbf{P} è la quantità di moto totale. Analogamente, otteniamo per il momento totale delle forze esterne agenti sul sistema

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_P + \mathbf{r}_P \times \mathbf{F}^{\text{ext}}, \quad (24)$$

dove \mathbf{L} è il momento totale valutato rispetto all'origine, \mathbf{L}_P quello rispetto a P, e \mathbf{F}^{ext} è la risultante delle forze esterne. Derivando la (23), e tenendo conto della relazione fra $\dot{\mathbf{P}}$ e \mathbf{F}^{ext} , otteniamo il risultato cercato. Anche più in generale, per esempio se P è animato di moto rettilineo uniforme. Vorrei sottolineare che si parla della *risultante dei momenti delle forze esterne*, e non del momento della forza risultante: infatti la "forza risultante" non ha un punto d'applicazione ben definito.

Da questo risultato segue come corollario la seguente **legge di conservazione del momento angolare**:

Il momento angolare totale di un sistema di particelle isolato si conserva nel tempo.

In pratica, l'uso della legge di conservazione del momento angolare è alquanto più delicato di quello della conservazione della quantità di moto. In effetti, per la quantità di moto possiamo ricorrere all'artificio di suddividere il sistema in sottosistemi, e di sostituire mentalmente a ciascun sottosistema un punto materiale di uguale massa, posto nel centro di massa del sottosistema: in questo modo, abbiamo "spazzato sotto il tappeto" la struttura interna del sottosistema. Ma quando vogliamo trattare la conservazione del momento angolare, siamo costretti ad assegnare a ciascun sottosistema non solo una massa, una posizione e una velocità data, secondo la regola appena detta, *ma anche un momento angolare* pari al momento angolare "intrinseco" del sottosistema, valutato cioè rispetto al suo centro di massa.

In effetti, se applichiamo la (23), prendendo per P il centro di massa del sistema, otteniamo la seguente relazione:

Il momento angolare totale di un sistema di particelle è uguale alla somma del momento angolare totale, valutato rispetto al suo centro di massa, e del prodotto fra il raggio vettore del centro di massa e la quantità di moto totale del sistema stesso.

È interessante valutare la derivata rispetto al tempo del momento angolare “intrinseco” di un sistema. Esso è espresso da

$$\mathbf{M}^{\text{int}} = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{\text{cm}}) \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i. \quad (25)$$

Valutiamo la derivata rispetto al tempo di questa espressione:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}}^{\text{int}} &= - \sum_i \dot{\mathbf{r}}_{\text{cm}} \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{\text{cm}}) \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \\ &= \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{\text{cm}}) \times \mathbf{f}_i^{\text{ext}} = \mathbf{L}^{\text{ext}}. \end{aligned} \quad (26)$$

In questa espressione, abbiamo prima sfruttato il fatto che la prima somma a secondo membro si annulla perché $\dot{\mathbf{r}}_{\text{cm}}$ è parallelo a $\mathbf{P} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i$, e poi abbiamo espresso il secondo termine in termini delle forze \mathbf{f}_i che agiscono sulla particella i . Le forze interne si annullano due a due, e quindi rimane solo il contributo delle forze esterne. Quindi

La derivata rispetto al tempo del momento angolare di un sistema di particelle, preso rispetto al centro di massa del sistema, è uguale alla risultante dei momenti delle forze esterne applicate al sistema, presi rispetto al centro di massa.

5. Equazioni cardinali

Possiamo riassumere le relazioni ottenute fin qui nelle due equazioni che esprimono le derivate rispettivamente della quantità di moto totale e del momento angolare totale:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^{\text{ext}}; \quad (27)$$

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{L}^{\text{ext}}. \quad (28)$$

Esse sono note come le **equazioni cardinali** della dinamica dei sistemi. Notiamo che la seconda equazione cardinale vale nella forma riportata, se \mathbf{M} e \mathbf{L} sono valutati rispetto allo stesso punto P, se esso è fisso o dotato di moto rettilineo uniforme, o se coincide con il centro di massa del sistema. Se lo stato di moto del sistema è univocamente determinato da \mathbf{P} e \mathbf{M} (come accade nei “corpi rigidi”), queste equazioni permettono in linea di principio di risolverne la dinamica.

6. Energia meccanica

Consideriamo adesso il caso in cui le particelle del sistema interagiscono tramite *forze conservative*. Questo vuol dire che, per ogni coppia (i, j) di particelle, esiste una funzione

$u_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ delle posizioni delle particelle, che permette di esprimere le forze \mathbf{f}_{ij} , \mathbf{f}_{ji} agenti fra di esse mediante le seguenti relazioni:

$$\mathbf{f}_{ij} = -\frac{\partial u_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad \mathbf{f}_{ji} = -\frac{\partial u_{ij}}{\partial \mathbf{r}_j}. \quad (29)$$

In questa situazione, è possibile definire l'**energia meccanica** del sistema come la somma dell'energia cinetica T , definita da

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2, \quad (30)$$

e dell'energia potenziale $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$, definita da

$$U = \sum_{(i,j)} u_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j). \quad (31)$$

In questa espressione, la somma percorre tutte le coppie *distinte* di particelle, per cui la coppia formata dalle particelle i e j appare una sola volta. (Per esempio, si può decidere di porre $j > i$.) L'energia meccanica del sistema è allora data da

$$E = T + U. \quad (32)$$

Valutiamo adesso la derivata di E rispetto al tempo. Si ha

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i. \quad (33)$$

Per la legge di Newton, si ha

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{f}_i = \sum'_{j(\neq i)} \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_i^{\text{ext}}. \quad (34)$$

D'altra parte, si ha

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{(i,j)} \left[\frac{\partial u_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{\partial u_{ij}}{\partial \mathbf{r}_j} \cdot \dot{\mathbf{r}}_j \right]. \quad (35)$$

Questa somma può essere riarrangiata nella maniera seguente:

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^N \sum'_{j(\neq i)} \frac{\partial u_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = - \sum_{i=1}^N \sum'_{j(\neq i)} \mathbf{f}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i, \quad (36)$$

dove abbiamo implicitamente posto $u_{ji} = u_{ij}$, $\forall i, j$. Sommando membro a membro la (33) e la (35), e tenendo conto della (34), otteniamo

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^{\text{ext}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i. \quad (37)$$

Quindi la variazione infinitesima di E durante un breve intervallo di tempo di durata dt è espressa da

$$dE = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^{\text{ext}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i dt = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r}_i, \quad (38)$$

dove $d\mathbf{r}_i$ è lo spostamento della particella i durante l'intervallo. Riconosciamo a secondo membro il lavoro (infinitesimo) dW^{ext} compiuto dalle forze esterne applicate al sistema

durante l'intervallo. Possiamo integrare questa relazione su un intervallo di tempo di durata finita, ottenendo l'espressione della variazione ΔE dell'energia meccanica:

$$\Delta E = \int dW^{\text{ext}} = \Delta W^{\text{ext}}. \quad (39)$$

Abbiamo così ottenuto il seguente risultato:

La variazione di energia meccanica subita da un sistema durante un certo intervallo di tempo è pari al lavoro eseguito dalle forze esterne sul sistema nello stesso intervallo.

Ne segue come corollario la **legge di conservazione dell'energia meccanica**:

In un sistema isolato, al cui interno agiscono solo forze conservative, l'energia meccanica (energia cinetica+energia potenziale) è costante nel tempo.

7. Importanza delle leggi di conservazione

Abbiamo ottenuto tre **leggi di conservazione**, valide per un sistema meccanico isolato, in cui agiscono solo forze conservative:

Conservazione della quantità di moto: La quantità di moto totale \mathbf{P} è costante nel tempo;

Conservazione del momento angolare: Il momento angolare totale \mathbf{M} è costante nel tempo;

Conservazione dell'energia meccanica: L'energia meccanica $E = T + U$ è costante nel tempo.

Notiamo che le prime due leggi di conservazione, dato che discendono direttamente dalla terza legge di Newton, sono valide anche in presenza di forze non conservative, interne al sistema.

Abbiamo ottenuto queste leggi supponendo che le particelle che compongono il sistema interagiscano due a due. Tuttavia, si può far vedere che esse rimangono valide anche se si considerano interazioni a tre o più corpi. Inoltre, nell'ambito di una visione atomistica (classica) della materia, si deve supporre che le forze che agiscono fra gli atomi siano tutte conservative. Quindi la legge di conservazione dell'energia meccanica dovrebbe essere valida in generale. Tuttavia, se osserviamo il comportamento dei corpi macroscopici, essa non viene solitamente osservata. In effetti, fra corpi macroscopici agiscono spesso delle forze *non conservative*: per esempio la forza di attrito, o la resistenza del mezzo (nei fluidi). Per conciliare la nostra fiducia nella validità incondizionata della conservazione dell'energia meccanica a livello microscopico con la sua apparente non conservazione a livello macroscopico siamo costretti a supporre che l'energia meccanica "mancante" corrisponda a un moto microscopico che non è macroscopicamente visibile. Osservando che la diminuzione dell'energia meccanica macroscopica si accompagna spesso ad un aumento della temperatura, possiamo

congetturare che questo modo si manifesti in effetti *termici*, solitamente associati al calore.

In questo modo, la conservazione dell'energia meccanica (che abbiamo derivato sotto delle ipotesi particolari) viene ad assumere l'aspetto di un *principio universale*: esiste una quantità fisica, l'*energia*, che si conserva. L'energia è espressa come somma di diversi termini (come l'energia cinetica, l'energia potenziale, ma anche l'energia termica, chimica, ecc.). I singoli termini possono variare, ma la somma rimane costante. Quindi *le varie forme di energia possono trasformarsi le une nelle altre*, così come l'energia cinetica può trasformarsi in energia potenziale, e viceversa.

Da quando questo principio è stato formulato nella prima metà dell'Ottocento, è stato sempre possibile identificare le forme di energia associate ai diversi fenomeni in modo da confermarne la validità universale. Esso è ormai alla base della concezione fisica del mondo.

Vorrei anche sottolineare che degli argomenti più sofisticati hanno portato a vedere nelle leggi di conservazione la manifestazione delle *simmetrie* soggiacenti alle leggi della dinamica, cioè all'invarianza di queste leggi rispetto ad opportune trasformazioni. È così possibile mostrare che

- La conservazione della *quantità di moto* discende dall'invarianza rispetto a *traslazioni* arbitrarie, e quindi dall'uniformità dell'universo;
- La conservazione del *momento angolare* discende dall'invarianza rispetto a *rotazioni* arbitrarie, e quindi dall'isotropia dell'universo;
- La conservazione dell'energia discende dall'invarianza rispetto a traslazioni *nel tempo*, e quindi dalla costanza delle leggi della dinamica.

Questa corrispondenza fra simmetrie e leggi di conservazione è uno dei principi più fecondi della fisica teorica.

7.1. Decomposizione dell'energia cinetica: Teorema di König

È interessante valutare l'espressione dell'energia cinetica di uno stesso sistema in sistemi di riferimento diversi. Consideriamo un sistema di punti materiali, in cui la massa della particella i è uguale a m_i , \mathbf{r}_i è il raggio vettore che identifica la sua posizione, e $\dot{\mathbf{r}}_i$ la sua velocità. In questo sistema di riferimento, l'energia cinetica del sistema è data da

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2. \quad (40)$$

Passiamo adesso ad un altro sistema di riferimento, animato rispetto al primo di una velocità (costante) \mathbf{V} . In questo sistema di riferimento, indicando con \mathbf{r}'_i la posizione della particella i , e con $\dot{\mathbf{r}}'_i$ la sua velocità, si ha

$$\dot{\mathbf{r}}'_i = \dot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{V}. \quad (41)$$

Quindi, nel nuovo sistema di riferimento, l'energia cinetica vale

$$T' = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i'^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{V})^2$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - \mathbf{V} \cdot \left(\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) V^2 \\
&= T - \mathbf{V} \cdot \mathbf{P} + \frac{1}{2} M V^2,
\end{aligned} \tag{42}$$

dove $\mathbf{P} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ è la quantità di moto totale e $M = \sum_i m_i$ la massa totale del sistema.

Un caso particolare si ha quando \mathbf{V} è uguale alla velocità \mathbf{v}_{cm} del centro di massa. Si ha allora

$$T' = T - \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2. \tag{43}$$

In altri termini, se indichiamo con T^{int} l'energia cinetica "intrinseca" del sistema, cioè quella valutata nel sistema di riferimento del centro di massa, si ha, in un qualunque sistema di riferimento,

$$T = T^{\text{int}} + \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2. \tag{44}$$

Abbiamo così ottenuto il seguente risultato, noto come **teorema di König**:

L'energia cinetica di un sistema in un dato sistema di riferimento è pari alla somma dell'energia cinetica che esso possiede nel sistema di riferimento del centro di massa, e dell'energia cinetica di un punto materiale di massa pari a quella del sistema, animato della velocità del suo centro di massa.

È un corollario di questo risultato che il valore dell'energia cinetica di un sistema è minimo quando essa viene valutata nel sistema del centro di massa.

8. Urti

È di soddisfazione vedere che le leggi di conservazione che abbiamo ottenuto permettono di risolvere esplicitamente parecchi semplici ma importanti problemi di dinamica. Una classe di fenomeni in cui le leggi di conservazione giocano un ruolo importante è quello degli *urti*. Consideriamo due punti materiali che interagiscono solo fra di loro. Supponiamo che le forze che essi esercitano l'uno sull'altro siano apprezzabili soltanto quando la loro distanza è piccola. Immaginiamo di disporli inizialmente a una certa distanza l'uno dall'altro, ma di animarli di una velocità che li avvicini fino a farli incontrare. Essi interagiranno brevemente (se la velocità di cui sono animati è abbastanza elevata, e se le interazioni lo permettono), e poi si allontaneranno uno dall'altro animati da un nuovo valore della velocità. In questa situazione, l'effetto dell'interazione fra questi due corpi sarà pienamente descritto dalla variazione della velocità che ciascuno di essi ha subito.

Consideriamo quindi due particelle, indicate con 1 e 2. Sia m_i la massa della particella i , e \mathbf{v}_i la sua velocità iniziale. Supponiamo che le posizioni e le velocità iniziali delle due particelle siano tali da portarle ad avvicinarsi tanto da entrare in interazione per un breve periodo. Supponiamo che, dopo questo tempo, le particelle si allontanino l'una dall'altra, essendo animate delle velocità \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 rispettivamente. Ci domandiamo quali informazioni sulle velocità finali \mathbf{w}_i discendono dalle leggi di conservazione.

Consideriamo la legge di conservazione della quantità di moto. Inizialmente, la quantità di moto totale \mathbf{P} vale

$$\mathbf{P} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2. \quad (45)$$

È anche facile ottenere la velocità iniziale del centro di massa:

$$\mathbf{v}_{\text{cm}} = \frac{\mathbf{P}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (46)$$

La conservazione della quantità di moto implica che \mathbf{P} ha lo stesso valore anche dopo l'urto:

$$m_1 \mathbf{w}_1 + m_2 \mathbf{w}_2 = \mathbf{P} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2. \quad (47)$$

Ne segue anche che il centro di massa del sistema si muove di moto rettilineo uniforme, animato dalla velocità calcolata in (46).

Possiamo quindi scegliere, per procedere, il sistema di riferimento solidale con il centro di massa, e porre detto centro nell'origine O . In questo sistema di riferimento,

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = 0, \quad (48)$$

per cui

$$\mathbf{v}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \mathbf{v}_1. \quad (49)$$

Consideriamo adesso la legge di conservazione del momento angolare. Molto prima dell'urto (che abbiamo supposto durare un tempo molto breve) le particelle si muovono di moto rettilineo uniforme. D'altra parte, le velocità di cui esse sono animate sono parallele fra di loro. Quindi le traiettorie delle particelle, molto tempo prima dell'urto, si approssimano a delle rette parallele che, in generale, definiscono un piano che deve necessariamente contenere il centro di massa, che abbiamo scelto come origine degli assi. § Possiamo scegliere questo piano come piano xy . Quindi, per ciascuna delle due particelle, il momento angolare \mathbf{M}_i , definito da

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i, \quad (50)$$

sarà diretto lungo l'asse z , dato che tanto \mathbf{r}_i e \mathbf{v}_i appartengono al piano xy . Questo sarà dunque vero anche per la loro somma, il momento angolare totale \mathbf{M} . Ora, poiché dopo l'urto è tuttora vero che \mathbf{w}_1 è parallelo a \mathbf{w}_2 , si ha necessariamente che le velocità dopo l'urto (dovendo essere perpendicolari a \mathbf{M}) debbono essere parallele al piano xy . Quindi anche i raggi vettori \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 dopo l'urto debbono giacere nello stesso piano. Abbiamo così ottenuto che la conservazione del momento angolare implica che le traiettorie asintotiche delle particelle prima e dopo l'urto giacciono nello stesso piano.

Nel caso di una "collisione frontale" questo ragionamento vale *per qualunque* piano che contiene le traiettorie asintotiche iniziali. Quindi, in questo caso, il movimento delle due particelle avviene tutto sulla retta definita dalle traiettorie iniziali.

§ Questo non sarà vero nel caso particolare di una "collisione frontale", in cui questo piano non è univocamente definito. Discuteremo questo caso più oltre.

Se le particelle interagiscono mediante forze conservative, l'energia meccanica si conserva nell'urto. In questo caso si usa parlare di **urto elastico**. D'altra parte, nelle nostre ipotesi, le forze fra le particelle sono diverse da zero solo quando esse sono molto vicine. Quindi l'energia potenziale dell'interazione fra le particelle tende a una costante al crescere della separazione fra loro. Questa costante può essere messa uguale a zero. Quindi la conservazione dell'energia meccanica implica che l'energia cinetica totale delle due particelle deve essere uguale prima e dopo l'urto:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1w_1^2 + \frac{1}{2}m_2w_2^2. \quad (51)$$

Ora, a causa della relazione (49) (e dell'analogia espressione per le velocità dopo l'urto), si può vedere che l'energia cinetica è proporzionale al quadrato della velocità relativa \mathbf{V} tra le particelle, definita da

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2. \quad (52)$$

Si ha infatti

$$\mathbf{v}_1 = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} \mathbf{V}; \quad \mathbf{v}_2 = -\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)^{-1} \mathbf{V}. \quad (53)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2} \left[\frac{m_1}{(1 + m_1/m_2)^2} + \frac{m_2}{(1 + m_2/m_1)^2} \right] V^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} V^2. \end{aligned} \quad (54)$$

Se l'energia cinetica è uguale prima e dopo l'urto, il modulo $|\mathbf{W}|$ della velocità relativa $\mathbf{W} = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$ dopo l'urto deve essere uguale al modulo $|\mathbf{V}|$ della velocità relativa prima dell'urto. Abbiamo così ottenuto il seguente risultato:

In un urto elastico fra due particelle, il modulo della velocità relativa fra di esse si conserva.

Sebbene abbiamo derivato questo risultato nel sistema di riferimento solidale con il centro di massa, esso vale in qualunque sistema di riferimento inerziale, perché la velocità relativa \mathbf{V} è la stessa in ciascuno di questi sistemi di riferimento.

8.1. Urti in una dimensione

Le leggi di conservazione permettono di risolvere completamente il problema della determinazione delle velocità dopo l'urto in funzione di quelle prima dell'urto per il caso di "collisione frontale", in cui le particelle si muovono lungo una retta. Prendiamo questa retta come asse x , e indichiamo con v_i , w_i , V , ecc., le componenti della velocità lungo l'asse x . Nel caso di un urto elastico, poiché il modulo della velocità relativa si conserva, si deve avere $W = \pm V$. Ora $W = V$ corrisponde alla situazione "prima dell'urto". Si ha quindi necessariamente $W = -V$.

Tornando al sistema di riferimento “del laboratorio”, possiamo valutare facilmente l'effetto dell'urto elastico di una particella di massa m_1 , dotata di una velocità iniziale v_1 , contro una particella di massa m_2 , inizialmente ferma. Si ha

$$V = v_1, \quad v_{\text{cm}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1. \quad (55)$$

D'altra parte, si ha

$$m_1 w_1 + m_2 w_2 = (m_1 + m_2) v_{\text{cm}} = m_1 V; \quad (56)$$

$$w_1 - w_2 = -V. \quad (57)$$

Moltiplicando la seconda equazione per m_2 e sommando le due relazioni membro a membro, otteniamo

$$(m_1 + m_2) w_1 = (m_1 - m_2) V = (m_1 - m_2) v_1, \quad (58)$$

per cui

$$w_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1. \quad (59)$$

Soffermiamoci su due casi notevoli:

- (i) Se $m_2 \gg m_1$, si ha $w_1 \simeq -v_1$: la particella “rimbalza” su un ostacolo con massa molto più grande della sua;
- (ii) Se $m_1 = m_2$, si ha $w_1 = 0$ (e $w_2 = v_1$): la particella comunica la sua velocità al “bersaglio”.

8.2. Urti anelastici

Molto spesso, negli urti fra corpi macroscopici, entrano in gioco forze non conservative. In questo caso la legge di conservazione dell'energia meccanica (almeno nella forma semplice che abbiamo discusso) non può essere applicata. In certi casi è possibile però descrivere il comportamento delle particelle nell'urto mediante delle ipotesi fenomenologiche sull'urto stesso.

Un caso particolarmente semplice è quello dell'**urto completamente anelastico**. In questo caso, si suppone che le due particelle si saldino l'una all'altra dopo l'urto, formando un punto materiale di massa pari alla somma delle loro masse.

In questo caso, la conservazione della quantità di moto dà tutta l'informazione necessaria per prevedere il moto di questo punto materiale dopo l'urto. In effetti, la sua quantità di moto dopo l'urto sarà pari a $\mathbf{P} = (m_1 + m_2)\mathbf{w}$, dove \mathbf{w} è la velocità comune delle due particelle. Essa sarà uguale alla quantità di moto totale prima dell'urto, che è pari a $\mathbf{P} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$. Quindi

$$\mathbf{W} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (60)$$

Notiamo che questa è anche, com'è naturale, la velocità del centro di massa del sistema. Abbiamo così ottenuto il seguente risultato:

In un urto completamente anelastico fra particelle, il punto materiale che ne risulta si muove animato dalla velocità posseduta dal centro di massa prima dell'urto.