

# Relazioni fondamentali nella dinamica dei sistemi

L. P.

2 Maggio 2010

## 1. Quantità di moto e centro di massa

Consideriamo un sistema  $S$  costituito da  $N$  punti materiali. Il punto  $i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) possiede la massa  $m_i$ , è posto nel punto  $P_i$  di raggio vettore  $\mathbf{r}_i = \overrightarrow{OP_i}$  ed è animato dalla velocità  $\mathbf{v}_i = d\mathbf{r}_i/dt$ .

La **quantità di moto totale** del sistema è il vettore  $\mathbf{P}$  somma delle quantità di moto dei singoli punti che compongono il sistema:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i. \quad (1)$$

Il **centro di massa** del sistema è il punto geometrico  $P_{CM}$  il cui raggio vettore  $\mathbf{r}_{CM} = \overrightarrow{OP_{CM}}$  è dato dall'espressione

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}. \quad (2)$$

L'espressione a secondo membro è detta **media pesata** dei raggi vettori  $\mathbf{r}_i$ . L'espressione "centro di massa" viene spesso abbreviata in CM.

Si dimostra che se un sistema è costituito da due sottosistemi, il primo con massa totale  $M_1$  e CM posto in  $\mathbf{r}_1$ , e il secondo con massa totale  $M_2$  e CM posto in  $\mathbf{r}_2$ , il CM  $\mathbf{r}_{CM}$  del sistema totale è posto in

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{M_1 \mathbf{r}_1 + M_2 \mathbf{r}_2}{M_1 + M_2}. \quad (3)$$

Questa relazione permette di valutare il CM di un sistema complesso suddividendolo in sottosistemi e valutando la posizione del CM di ciascuno di essi, e valutando la posizione del CM del sistema totale come se la massa di ciascun sottosistema fosse concentrata nel suo CM.

**Teorema del centro di massa:** La quantità di moto totale di un sistema è espressa da

$$\mathbf{P} = \left( \sum_{i=1}^N m_i \right) \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \left( \sum_{i=1}^N m_i \right) \mathbf{v}_{CM}. \quad (4)$$

In altre parole, essa è uguale alla quantità di moto di un punto materiale di massa pari alla massa totale del sistema, e animato di una velocità pari alla velocità del CM.

## 2. Prima equazione cardinale

È una conseguenza del terzo principio della dinamica che la variazione nel tempo della quantità di moto totale di un sistema ha luogo solo per l'azione delle forze *esterne* ad esso.

**Prima equazione cardinale del moto dei sistemi:** La derivata della quantità di moto totale di un sistema rispetto al tempo è pari alla risultante delle forze esterne applicate al sistema:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^{\text{ext}}. \quad (5)$$

In questa equazione  $\mathbf{f}_i^{\text{ext}}$  è la risultante delle forze esterne al sistema che agiscono sul punto  $i$ .

Per il teorema del centro di massa, questa derivata è pari al prodotto della massa totale del sistema per l'accelerazione del centro di massa:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \left( \sum_{i=1}^N m_i \right) \frac{d\mathbf{v}_{\text{CM}}}{dt} = M\mathbf{a}_{\text{CM}}, \quad (6)$$

dove  $M = \sum_{i=1}^N m_i$  è la massa totale del sistema.

Un sistema è detto **isolato** se su di esso non agiscono forze.

**Conservazione della quantità di moto:** La quantità di moto di un sistema isolato rimane costante:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0. \quad (7)$$

Conseguentemente, il CM di un sistema isolato rimane in quiete, o si muove di moto rettilineo uniforme.

## 3. Momento angolare

Dato un punto materiale di massa  $m$ , posto nel punto P di raggio vettore  $\mathbf{r}$  e animato dalla velocità  $\mathbf{v}$ , e un punto geometrico  $O'$  di raggio vettore  $r_{O'} = \overrightarrow{OO'}$  detto **polo**, il **momento angolare** del punto materiale rispetto ad  $O'$  è espresso da

$$\mathbf{L} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{O'}) \times m\mathbf{v}. \quad (8)$$

Il vettore  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_{O'} = \overrightarrow{O'P}$  può essere considerato come il raggio vettore di P preso a partire dal polo  $O'$ .

Il **momento angolare totale** di un sistema di punti materiali preso rispetto a un polo  $O'$  è pari alla somma dei momenti angolari dei singoli punti materiali che lo costituiscono:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{O'}) \times m_i \mathbf{v}_i. \quad (9)$$

**Cambio di polo:** Se indichiamo con  $\mathbf{L}_O$  il momento angolare di un sistema valutato rispetto al polo O, e con  $\mathbf{L}_{O'}$  quello valutato rispetto al polo O', si ha

$$\mathbf{L}_{O'} = \mathbf{L}_O + (\mathbf{r}_O - \mathbf{r}_{O'}) \times \mathbf{P} = \overrightarrow{O'O} \times \mathbf{P}, \quad (10)$$

dove  $\mathbf{P}$  è la quantità di moto totale del sistema. In particolare, se il CM del sistema è in quiete, il momento angolare totale non dipende dal polo.

**Teorema di König del momento angolare:** Dato un polo arbitrario O e il momento angolare totale  $\mathbf{L}_O$  valutato rispetto ad esso, si ha

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{L}_{CM} + (\mathbf{r}_{CM} - \mathbf{r}_O) \times \mathbf{P}, \quad (11)$$

dove  $\mathbf{r}_{CM}$  è il raggio vettore del CM,  $\mathbf{P}$  la quantità di moto totale, e  $\mathbf{L}_{CM}$  è il momento angolare totale valutato rispetto al centro di massa. In altri termini, il momento angolare di un sistema valutato rispetto ad un polo O arbitrario è pari al momento angolare valutato rispetto al CM, più il momento angolare di un punto materiale avente la quantità di moto totale del sistema e posto nel CM.

#### 4. Seconda equazione cardinale

Il **momento di una forza**  $\mathbf{f}$  applicata a un punto materiale posto in P e valutato rispetto ad un polo O è dato dall'espressione

$$\boldsymbol{\tau} = \overrightarrow{OP} \times \mathbf{f} = (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_O) \times \mathbf{f}. \quad (12)$$

È una conseguenza del terzo principio della dinamica che la variazione del momento angolare totale di un sistema rispetto ad un polo fisso ha luogo solo per l'azione delle forze *esterne* ad esso.

Il **momento angolare totale** di un sistema rispetto ad un polo O è pari alla somma dei momenti angolari dei singoli punti materiali che lo costituiscono, valutati rispetto allo stesso polo O.

**Seconda equazione cardinale del moto dei sistemi:** La derivata del momento angolare totale di un sistema valutato rispetto a un polo *fisso* è pari alla risultante dei momenti delle forze esterne applicate ai punti materiali che lo costituiscono:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\tau}_i^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_O) \times \mathbf{f}_i^{\text{ext}}. \quad (13)$$

Si dimostra che la stessa relazione vale se i momenti angolari e i momenti delle forze sono tutti valutati rispetto al CM:

$$\frac{d\mathbf{L}_{CM}}{dt} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{CM}) \times \mathbf{f}_i^{\text{ext}}. \quad (14)$$

**Conservazione del momento angolare:** In un sistema isolato, il momento angolare totale, valutato rispetto a un polo fisso o al CM, si conserva:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0. \quad (15)$$

## 5. Energia cinetica

L'**energia cinetica** di un punto materiale di massa  $m$ , animato da una velocità  $\mathbf{v}$ , è data dall'espressione

$$K = \frac{1}{2}mv^2. \quad (16)$$

L'**energia cinetica totale** di un sistema di punti materiali, rispettivamente di massa  $m_i$  e animati dalla velocità  $\mathbf{v}_i$ , è pari alla somma delle energie cinetiche dei punti materiali che lo costituiscono:

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}m_i v_i^2. \quad (17)$$

**Teorema di König dell'energia cinetica:** L'energia cinetica di un sistema di punti materiali è pari alla somma dell'energia cinetica del sistema, valutata in un sistema di riferimento solidale con il centro di massa, più l'energia cinetica di un punto materiale di massa pari alla massa totale del sistema, animato dalla velocità del centro di massa:

$$K = K_{\text{CM}} + \frac{1}{2}Mv_{\text{CM}}^2, \quad (18)$$

dove

$$K_{\text{CM}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{\text{CM}})^2. \quad (19)$$

**Teorema dell'energia cinetica per i sistemi:** La variazione dell'energia cinetica di un sistema in un certo intervallo di tempo è pari alla somma del lavoro compiuto da *tutte* le forze (esterne ed interne) su ciascuno dei punti materiali che lo costituiscono:

$$\Delta K = K_f - K_i = \sum_{i=1}^N W_i; \quad (20)$$

$$W_i = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{f}_i^{\text{ris}}(t) \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} dt. \quad (21)$$

## 6. Energia potenziale

Una forza agente su un punto materiale è detta **conservativa** se il lavoro che essa compie quando il punto si sposta da un punto A a un punto B lungo un percorso  $\mathcal{C}$  dipende solo dagli estremi A e B del percorso e non dalla particolare curva  $\mathcal{C}$  lungo cui esso si effettua.

A una forza conservativa si può associare una funzione scalare della posizione, detta **energia potenziale**. Scelto arbitrariamente un punto di riferimento O in cui l'energia potenziale si annulla, l'energia potenziale  $U(\mathbf{r})$  nel punto generico P di raggio vettore  $\mathbf{r}$  è pari all'opposto del lavoro compiuto dalla forza nello spostare il punto da O a P lungo una curva  $\mathcal{C}$  arbitraria:

$$U(\mathbf{r}) = - \int_{\text{O}}^{\text{P}} \mathbf{f}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'. \quad (22)$$

Da questa definizione segue che la componente  $\alpha$  della forza ( $\alpha = x, y, z$ ), valutata in  $P$ , è pari alla derivata parziale di  $U(\mathbf{r})$  fatta rispetto ad  $\alpha$ , cambiata di segno:

$$f_x = - \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{\mathbf{r}}; \quad f_y = - \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{\mathbf{r}}; \quad f_z = - \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{\mathbf{r}}. \quad (23)$$

Queste relazioni possono essere riassunte con la **notazione nabra**. Introducendo l'operatore **nabra** definito dall'espressione

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (24)$$

dove  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  sono i versori degli assi, si ha

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}). \quad (25)$$

La nozione di forza conservativa si estende a forze che si applicano a due o più punti materiali. Dato un sistema di  $N$  punti materiali identificati dall'indice  $i$ , si dice che essi sono sottoposti a un campo di forze conservative se il lavoro di queste forze, quando i punti cambiano le loro rispettive posizioni dalla posizione iniziale  $X^0 = (\mathbf{r}_1^0, \dots, \mathbf{r}_N^0)$  alla posizione finale  $X = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ , dipende solo da  $X^0$  e  $X$  e non dal particolare percorso seguito dai punti nel loro spostamento.

In questo caso è possibile associare alle forze una funzione energia potenziale  $U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ , tale che la forza agente sul punto  $i$  è data da

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = -\nabla_i U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N), \quad (26)$$

dove abbiamo introdotto la notazione

$$\nabla_i = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y_i} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z_i}. \quad (27)$$

Il lavoro  $W$  compiuto dalle forze nello spostamento del sistema dalla configurazione  $X^0$  alla configurazione  $X$  è pari all'opposto della differenza fra l'energia potenziale in  $X$  e quella in  $X^0$ :

$$W = -U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) + U(\mathbf{r}_1^0, \dots, \mathbf{r}_N^0). \quad (28)$$

Se il sistema non è sottoposto a forze esterne, l'energia potenziale del sistema rimane invariata rispetto a una traslazione arbitraria:

$$U(\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}, \dots, \mathbf{r}_N + \mathbf{a}) = U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N), \quad \forall \mathbf{a}. \quad (29)$$

In generale, è utile distinguere fra l'energia potenziale  $U^{\text{int}}$  interna al sistema, dovuto alle interazioni fra le particelle che compongono il sistema, e l'energia potenziale  $U^{\text{ext}}$  dovuta alle forze esterne applicate al sistema.

Se le forze agenti fra le particelle sono interazioni di coppia, l'energia potenziale ha per espressione

$$U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} u_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j), \quad (30)$$

dove ogni coppia di indici  $(i, j)$  compare *una volta sola*. Per il terzo principio della dinamica si può mostrare che l'energia potenziale di coppia  $u_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$  dipende solo dalla distanza  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$  fra i due punti.

## 7. Conservazione dell'energia meccanica

Se un sistema è sottoposto all'azione di sole forze conservative, per il teorema dell'energia cinetica si ha

$$\Delta K = K_f - K_i = W = -U(X_f) + U(X_i). \quad (31)$$

Quindi

$$K_f + U(X_f) = K_i + U(X_i) = E = \text{const.} \quad (32)$$

In un sistema sottoposto a sole forze conservative la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale rimane costante. Questa somma è chiamata **energia meccanica**.

Se sul sistema agiscono forze conservative e non conservative, la variazione dell'energia meccanica è pari al lavoro delle forze non conservative che agiscono sul sistema:

$$\Delta E = E_f - E_i = W^{\text{nc}}, \quad (33)$$

dove  $W^{\text{nc}}$  è il lavoro delle forze non conservative che agiscono sul sistema.

Per il teorema di König dell'energia cinetica, e tenendo conto della decomposizione dell'energia potenziale in interna ed esterna, l'energia meccanica può essere divisa in energia interna  $E^{\text{int}} = K_{\text{CM}} + U^{\text{int}}$  ed energia esterna  $E^{\text{ext}} = \frac{1}{2}Mv_{\text{CM}}^2 + U^{\text{ext}}$ :

$$E = (K_{\text{CM}} + U^{\text{int}}) + \left( \frac{1}{2}Mv_{\text{CM}}^2 + U^{\text{ext}} \right) = E^{\text{int}} + E^{\text{ext}}. \quad (34)$$