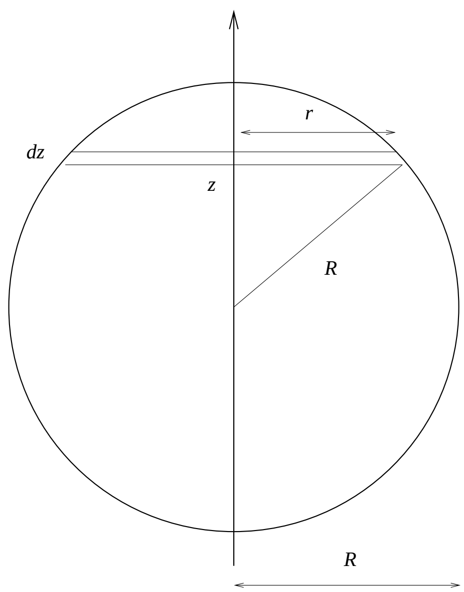
Momento d'inerzia di una sfera

L. P.

8 Ottobre 2007

Vogliamo calcolare il momento d'inerzia di una sfera omogenea di massa M e raggio R. Indichiamo con ϱ la sua densità:

$$\varrho = \frac{M}{4\pi R^3/3}. \tag{1}$$



Poniamo l'origine degli assi nel centro della sfera, e consideriamo il contributo al momento d'inerzia dovuto a uno strato sottile di spessore $\mathrm{d}z$ posto a quota z (dove $-R \le z \le +R$). La massa di questo strato è data da

$$\mathrm{d}m = \varrho\,\pi r^2\,\mathrm{d}z, \tag{2}$$

dove r è il raggio dello strato, che è dato da

$$r^2 = R^2 - z^2. \tag{3}$$

Il momento d'inerzia dello strato è pari a

$$\mathrm{d}I = \frac{1}{2}\mathrm{d}m\,r^2 = \frac{1}{2}\varrho\,\pi r^4\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\varrho\,\pi\left(R^2 - z^2\right)^2\,\mathrm{d}z. \tag{4}$$

Otteniamo così

$$I = \frac{1}{2}\varrho\,\pi \int_{-R}^{+R} \mathrm{d}z\ \left(R^2 - z^2\right)^2. \tag{5}$$

Valutiamo l'integrale:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\varrho\,\pi \int_{-R}^{+R} \mathrm{d}z\ \left(R^4 - 2R^2 z^2 + z^4\right) \\ &= \frac{1}{2}\varrho\,\pi \left[R^4 z - \frac{2}{3}R^2 z^3 + \frac{z^5}{5}\right]_{-R}^{+R} \\ &= \frac{1}{2}\varrho\,\pi\,R^5 \frac{16}{15} = \frac{8}{15}\,\varrho\,\pi\,R^5. \end{aligned} \tag{6}$$

Sostituendo il valore di ϱ dato dalla (1) otteniamo

$$I = \frac{2}{5}\,MR^2. \tag{7}$$