Forze dissipative

L. P.

26 Febbraio 2010

1. Resistenza del mezzo

Le leggi della dinamica, come le abbiamo enunciate, non sembrano applicarsi ai corpi della nostra esperienza quotidiana. In effetti, se noi, per esempio, lanciamo nell'aria un proiettile abbastanza leggero, la sua traiettoria non è una parabola, e la componente orizzontale della sua velocità non rimane costante. Analogamente, se diamo una spinta ad un corpo galleggiante, esso comincerà a muoversi nella direzione della spinta impressa, ma la sua velocità andrà via via riducendosi fino ad annullarsi. In conseguenza di queste osservazioni gli antichi avevano formulato la dottrina secondo cui era necessario un motore per mantenere un corpo in movimento. Fu un grande progresso dovuto a Galileo arrivare a rendersi conto che, *nel vuoto*, non è necessario un motore per mantenere un corpo in moto rettilineo uniforme. Sulla base di questo principio si è poi arrivati a stabilire, con Newton, le leggi fondamentali della dinamica.

Possiamo adesso vedere come i princìpi della dinamica forniscono un apparato concettuale che permette di descrivere quantitativamente il movimento dei corpi in un mezzo resistente (come l'aria o l'acqua) in un modo che si accorda con l'esperienza. Consideriamo per esempio la caduta verticale di un corpo, come nel famoso esperimento di Galileo dalla Torre di Pisa. Consideriamo un sistema di riferimento il cui asse z coincide con la verticale passante per la posizione iniziale del corpo e diretta verso l'alto, e scegliamo l'origine in modo che coincida con questa posizione. Se la caduta avvenisse nel vuoto, potremmo applicare il secondo principio della dinamica, ottenendo la legge oraria

$$z(t) = -\frac{1}{2}\,gt^2, \tag{1}$$

dove g è il modulo dell'accelerazione di gravità. Secondo questa legge, tutti i corpi cadono lungo la stessa lunghezza in tempi uguali. Tuttavia è esperienza comune che corpi più leggeri cadono più lentamente: anche senza andare a considerare il caso limite del proiettile di piombo e della piuma.

Per analizzare sperimentalmente questo fenomeno, è utile misurare il moto di caduta dei gravi in mezzi via via più densi. Supponiamo quindi di considerare dei corpi che cadono entro dei tubi contenenti acqua, oppure dell'olio abbastanza denso: prendendo sempre dei corpi tali che essi non galleggino nel fluido (come sappiamo dal principio di Archimede, questo richiede che la *densità* dei corpi, cioè la loro massa per unità di volume, sia inferiore a quella del mezzo). Prendiamo delle sfere di massa diversa, ma di uguale raggio (pari a R), e misuriamo la loro velocità istantanea in funzione del tempo. Otteniamo così delle curve come quelle mostrate in figura 1.

Osserviamo così che, dopo un transiente più o meno lungo, i corpi assumono una velocità costante nel tempo, e che dipende dalla loro massa. Questa velocità è chiamata **velocità limite**. Misurando la velocità limite per sfere di uguale raggio ma massa diversa otteniamo dei grafici come quelli mostrati in figura 2. Vediamo che questi dati possono essere descritti dall'espressione

$$v_\mathrm{l} = V_0\,(m - m_0), \tag{2}$$

dove m_0 è la massa di una sfera di glicerolo di uguale raggio.

Come possiamo interpretare questi risultati? Quando il corpo è animato dalla velocità limite, dato che esso si muove di moto rettilineo uniforme, *la risultante delle forze applicate ad esso deve essere nulla*. Le forze che si applicano sul corpo sono la forza-peso, la spinta di Archimede, e la resistenza del mezzo. La risultante della forza-peso e della spinta di Archimede è diretta verticalmente verso il basso (se $m > m_0$, come supponiamo) e vale

$$f_\mathrm{p} = (m - m_0)g. \tag{3}$$

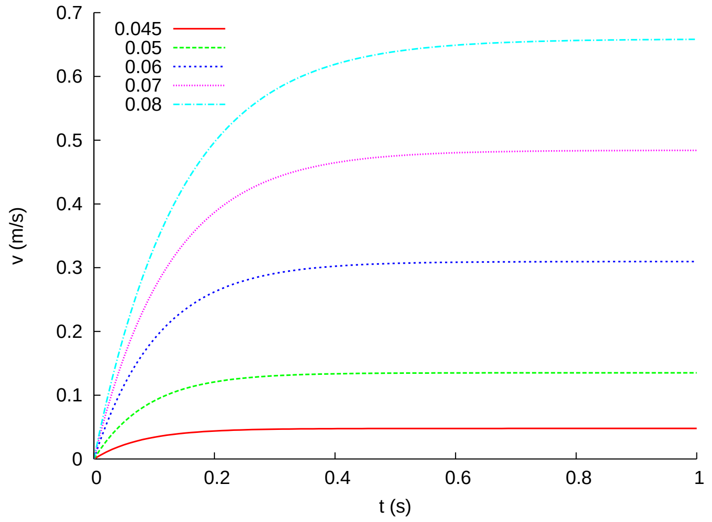

Figura 1. Grafico del modulo della velocità in funzione del tempo per delle sfere di uguale raggio $R = 2$ cm e massa diversa che cadono nel glicerolo a 20° C. Le masse sono misurate in kg e i tempi sono misurati in secondi. Una sfera di glicerolo di raggio 2 cm a 20° ha una massa m_0 di 0.0423 kg.

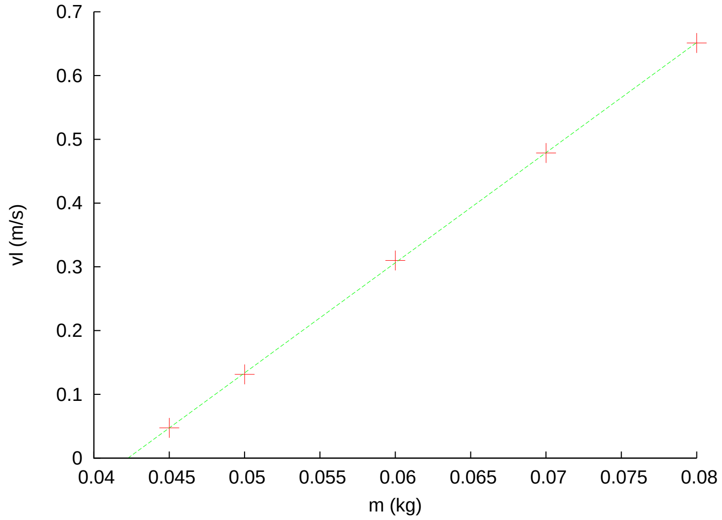

Figura 2. Velocità limite nel glicerolo per sfere di raggio $R = 2$ cm e diverse masse. Le masse sono misurate in kg.

Quindi questa forza deve essere equilibrata da una forza opposta. Questa forza non è presente se il corpo è in quiete rispetto al mezzo. L'ipotesi più semplice è che questa forza sia proporzionale alla velocità stessa e diretta in verso opposto:

$$\boldsymbol{f}_\mathrm{r} = -\kappa \boldsymbol{v}. \tag{4}$$

Il **coefficiente di resistenza** κ ha per dimensioni $[MT^{-1}]$.

Supponendo valida questa relazione, il corpo che cade in un mezzo viscoso soddisfa l'equazione differenziale

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -(m - m_0)g - \kappa \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}. \tag{5}$$

Per risolvere questa equazione, poniamo

$$v = -\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}. \tag{6}$$

Otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{m - m_0}{m}\, g - \frac{\kappa}{m}\, v. \tag{7}$$

È facile vedere che questa equazione differenziale ha per soluzione

$$v(t) = v_0\, \mathrm{e}^{-\kappa t/m} + v_{\mathrm{l}} \left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa t/m}\right), \tag{8}$$

dove v_0 è la velocità iniziale e la velocità limite v_{l} ha per espressione

$$v_{\mathrm{l}} = \frac{m - m_0}{\kappa}\, g. \tag{9}$$

In particolare si ha

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = v_{\mathrm{l}}, \tag{10}$$

in accordo con i grafici che abbiamo mostrato, a giustificazione del nome di velocità limite.

Notiamo il "rovesciamento di prospettive" nella descrizione del corpo che cade fra la scienza aristotelica e quella moderna. Per un aristotelico il "transiente" era un fenomeno temporaneo, di scarso interesse, che esprimeva soltanto l'impossibilità del corpo ad adattarsi istantaneamente (*natura non facit saltus*) al suo nuovo stato in cui una forza costante (la forza peso) gli conferiva una velocità costante. Nella scienza moderna, invece, la situazione "normale" corrisponde ai primi istanti di moto (in cui, come abbiamo visto, tutti i corpi si muovono più o meno allo stesso modo), mentre il moto uniforme che ne segue dipende dalla resistenza del mezzo ed è, se vogliamo, l'effetto di un "impedimento" rispetto alla teoria pura.

È interessante notare che, sperimentalmente, il coefficiente di resistenza per corpi sferici ha per espressione

$$\kappa = 6\pi\eta R, \tag{11}$$

dove R è il raggio della sfera e la quantità η (di dimensioni $[ML^{-1}T^{-1}]$) dipende dal mezzo considerato ed è chiamata **viscosità**. Poiché il peso di una sfera, a parità di materiale, è proporzionale a R^3, la resistenza del fluido diventa sempre più importante al diminuire della taglia del corpo considerato. Questa è la ragione per cui, per esempio, le nuvole non cadono: le nuvole sono costituite da gocce di diametro inferiore a 0.1 mm, per cui la loro velocità limite è inferiore a $1.2 \cdot 10^{-3}$ ms^{-1}, dato che la viscosità dell'aria è dell'ordine di $1.8 \cdot 10^{-5}$ N/m^{2}s. Se R aumenta, la velocità limite aumenta come R^2, per cui delle gocce del diametro già di alcuni millimetri hanno velocità limite dell'ordine di 1 m/s, e cadono a terra sotto forma di pioggia.

Notiamo che la proporzionalità fra la resistenza del mezzo e la velocità relativa del corpo rispetto al mezzo vale solo per velocità abbastanza piccole. Per valori della velocità più grandi si ha dapprima una regione in cui la resistenza cresce apprissimativamente come il *quadrato* della velocità relativa; al di là la situazione diventa ancora più complicata, in modo che è difficile descrivere la situazione in termini di una semplice legge $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})$. Ma non ci occuperemo di queste situazioni nel nostro corso.

2. Proiettili in un mezzo viscoso

Consideriamo adesso il motodi un corpo sottoposto alla forza-peso e alla resistenza del mezzo, quando la sua velocità iniziale non è diretta lungo la verticale. Detto $\boldsymbol{r}$ il raggio vettore istantaneo del corpo, la legge oraria del moto è descritta dalla funzione $\boldsymbol{r}(t)$ che soddisfa l'equazione differenziale

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = m'\boldsymbol{g} - \kappa\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}. \tag{12}$$

In questa equazione abbiamo posto, per semplificare,

$$m' = m - m_0, \tag{13}$$

dove m_0 è la massa di una quantità del mezzo di volume pari al volume del corpo considerato.

Scegliamo il nostro sistema di riferimento in modo che il piano xz coincida con il piano parallelo alla velocità iniziale $\boldsymbol{v}_0$ e all'accelerazione di gravità $\boldsymbol{g}$. Scegliamo l'asse delle z parallelo a $\boldsymbol{g}$ e diretto verso l'alto, e l'asse x concorde con la componente di $\boldsymbol{v}_0$ normale a $\boldsymbol{g}$. Scegliamo infine l'origine delle coordinate in modo che coincida con la posizione iniziale del corpo. Allora possiamo proiettare l'equazione (12) lungo le coordinate x e z, ottenendo

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\kappa\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}; \tag{14}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = -m'g - \kappa\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}. \tag{15}$$

A queste equazioni sono da aggiungere le condizioni iniziali $\boldsymbol{r}(0) = 0$ e

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = v_0\cos\theta; \tag{16}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = v_0\sin\theta. \tag{17}$$

In queste equazioni, la velocità iniziale $\boldsymbol{v}_0$ ha modulo v_0 e forma un angolo θ con l'asse delle x. La seconda equazione differenziale corrispnde a quella che abbiamo risolto nel paragrafo precedente, e quindi la sua soluzione è della forma

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v_0\sin\theta\,\mathrm{e}^{-\kappa t/m} - v_\mathrm{l}\left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa t/m}\right), \tag{18}$$

dove, come abbiamo visto,

$$v_\mathrm{l} = \frac{m'g}{\kappa}.$$

Per ottenere la legge oraria del moto, dobbiamo integrare questa relazione, tenendo conto della condizione iniziale (17). Otteniamo

$$z(t) = \frac{m(v_0\sin\theta + v_\mathrm{l})}{\kappa}\left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa t/m}\right) - v_\mathrm{l}t. \tag{19}$$

Vediamo quindi che dopo un transiente di durata $\sim m/\kappa$ il moto lungo l'asse z è uniforme con velocità $-v_\mathrm{l}$. Risolviamo adesso l'equazione (14). Otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0\cos\theta\,\mathrm{e}^{-\kappa t/m}, \tag{20}$$

che integrando (tenendo conto del fatto che $x(0) = 0$) dà

$$x(t) = \frac{mv_0\cos\theta}{\kappa}\left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa t/m}\right). \tag{21}$$

Quindi la velocità lungo l'asse x decresce esponenzialmente in tempi dell'ordine di m/κ, e il corpo cnsiderato si sposta, lungo l'asse x, di una distanza non superiore a $mv_0\cos\theta/\kappa$.

Per valutare la traiettoria, risolviamo la (21) rispetto a t:

$$t = \frac{m}{\kappa}\log\left(1 - \frac{\kappa x}{mv_0\cos\theta}\right), \tag{22}$$

e sostituiamo nella (19). Otteniamo

$$z(x) = \frac{v_0\sin\theta + v_\mathrm{l}}{v_0\cos\theta}\,x + \frac{mv_\mathrm{l}}{\kappa}\log\left(1 - \frac{\kappa x}{mv_0\cos\theta}\right). \tag{23}$$

È interessante discutere l'andamento di questa funzione. Essa è tangente alla retta $z = \tan\theta\,x$ vicino all'origine, poi se ne discosta. Per piccoli valori di x (quando ancora il rallentamento dovuto alla resistenza del mezzo non è evidente) essa può essere approssimata dalla parabola

$$z(x) = \tan\theta\,x - \frac{m'}{2m}\,g\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2. \tag{24}$$

Tuttavia è facile vedere che z tende a $-\infty$ per x che si avvicina a $x^* = mv_0\cos\theta/\kappa$. In pratica, il proiettile comincia a percorrere una traiettoria parabolica, per poi finire a cadere lungo la verticale. Un esempio di traiettoria di questo tipo è mostrata in fig. 3.

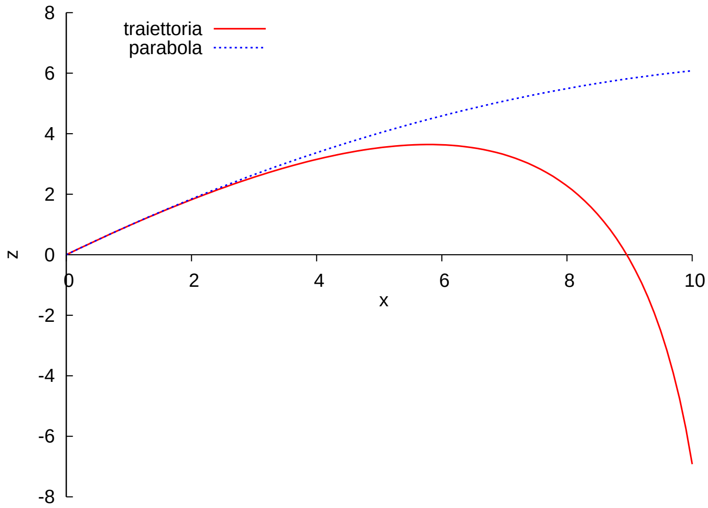

Figura 3. Un esempio di traiettoria per un proiettile in un mezzo resistente. È mostrata anche la parabola che approssima la traiettoria vicino all'origine.

3. Oscillatore smorzato

Un caso di particolare interesse è quello di un corpo di massa m collegato a una molla di constante elastica k e immerso in un mezzo, per cui è soggetto a una resitenza di coefficiente di resistenza pari a κ. L'equazione del moto soddisfatta dal corpo (nel caso di un moto unidimensionale lungo l'asse x) è la seguente:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - \kappa\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}. \tag{25}$$

Nel caso in cui il coefficiente di resistenza κ si annulla, come abbiamo visto, il corpo si muove di moto armonico, descritto in generale dalla legge oraria

$$x(t) = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t, \tag{26}$$

dove

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}. \tag{27}$$

In presenza della resistenza del mezzo, cerchiamo una soluzione della forma

$$x(t) = (a\cos\omega t + b\sin\omega t)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}, \tag{28}$$

e identifichiamo le condizioni che debbono essere soddisfatte dalle costanti ω e λ. Otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = [(\omega b - \lambda a)\cos\omega t - (\omega a + \lambda b)\sin\omega t]\,\mathrm{e}^{-\lambda t}; \tag{29}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \left[\left(a(\lambda^2-\omega^2) - 2b\lambda\omega\right)\cos\omega t + \left(b(\lambda^2-\omega^2) + 2a\lambda\omega\right)\sin\omega t\right]\mathrm{e}^{-\lambda t}. \tag{30}$$

Quindi l'espressione (28) è soluzione dell'equazione (25) se

$$m\left(a(\lambda^2-\omega^2) - 2b\lambda\omega\right) = -ak - \kappa(\omega b - \lambda a); \tag{31}$$

$$m\left(b(\lambda^2-\omega^2) + 2a\lambda\omega\right) = -kb + \kappa(\omega a + \lambda b). \tag{32}$$

Questa è una coppia di equazioni lineari in a e b che, in generale, ammette un'unica soluzione: quella nulla. Tuttavia, in generale, l'equazione (25) deve ammettere una soluzione che dipende da due parametri arbitrari che dipendono dalle condizioni iniziali. Questo può aver luogo solo se i coefficienti di a e b in queste equazioni si annullano.[1] Abbiamo così due equazioni per ω e λ:

$$m\left(\lambda^2-\omega^2\right) = -k + \kappa\lambda; \tag{33}$$

$$2m\lambda = \kappa. \tag{34}$$

[1] Poiché l'equazione ha soluzioni non nulle solo se la matrice dei coefficienti ha determinante nullo, si può vedere che questa condizione implica, se ω e λ sono reali, che i coefficienti di a e b nelle due equazioni siano entrambi nulli.

Dalla seconda equazione otteniamo

$$\lambda = \frac{\kappa}{2m}. \tag{35}$$

Sostituendo questa espressione nella prima equazione otteniamo l'espressione di ω:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\kappa^2}{4m^2}. \tag{36}$$

Vediamo che l'effetto della resistenza del mezzo consiste in un leggero rallentamento (per piccoli valori di κ) della frequenza delle oscillazioni, e soprattutto nella decrescenza esponenziale della loro ampiezza. Questo effetto è chiamato **smorzamento**, per cui il presente sistema è chiamato **oscillatore smorzato**.

Notiamo inoltre che l'equazione (36) ammette soluzioni reali solo se la seguente disuguaglianza è soddisfatta:

$$\frac{\kappa}{2m} < \omega_0. \tag{37}$$

Quando questa disuguaglianza è violata, la forma (28) della soluzione non è accettabile. Si può mostrare che in questa situazione la soluzione delle equazioni (25) non presenta oscillazioni, ma è costituita dalla combinazione lineare di due esponenziali decrescenti (tranne nel caso "critico" $\kappa = 2m\omega_0$, in cui si ha un solo esponenziale decrescente, moltiplicato per un polinomio di 1° grado in t).

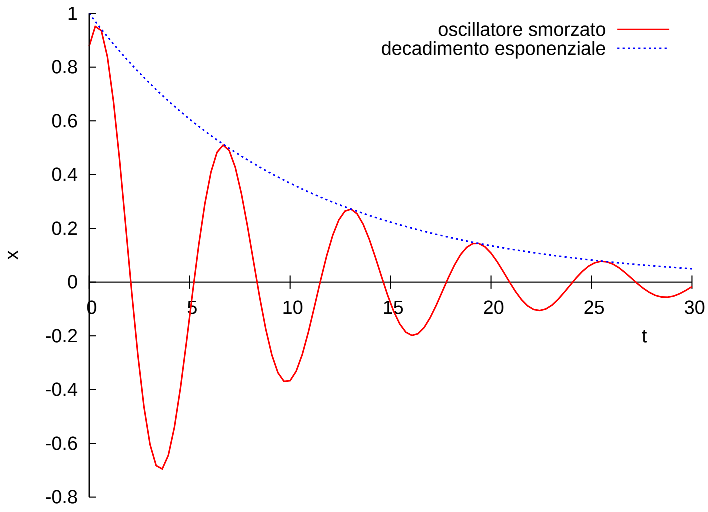

Figura 4. Legge oraria di un oscillatore smorzato.