# Momento angolare

**L. P.**

Maggio 2007

## 1. Prodotto vettoriale

### *1.1. Definizione*

Il **prodotto vettoriale** di due vettori tridimensionali $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ è un vettore $\boldsymbol{c}$ così definito:

a) Il *modulo* di $\boldsymbol{c}$ è pari all'area del parallelogramma costruito su $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, ed è quindi pari a

$$|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta, \tag{1}$$

dove $\theta$ è l'angolo compreso fra $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.

b) La *direzione* di $\boldsymbol{c}$ è normale al piano individuato da $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.

c) Il *verso* di $\boldsymbol{c}$ è individuato dalla **regola della mano destra**: posto il pollice della mano destra nella direzione di $\boldsymbol{a}$, e l'indice in quella di $\boldsymbol{b}$, il medio punterà nella direzione di $\boldsymbol{c}$. Alternativamente si può dire che un osservatore che si ponga lungo la direzione di $\boldsymbol{c}$, e guardi nella direzione di $\boldsymbol{a}$, vedrà $\boldsymbol{b}$ alla sua sinistra.

Vedi la figura 1.

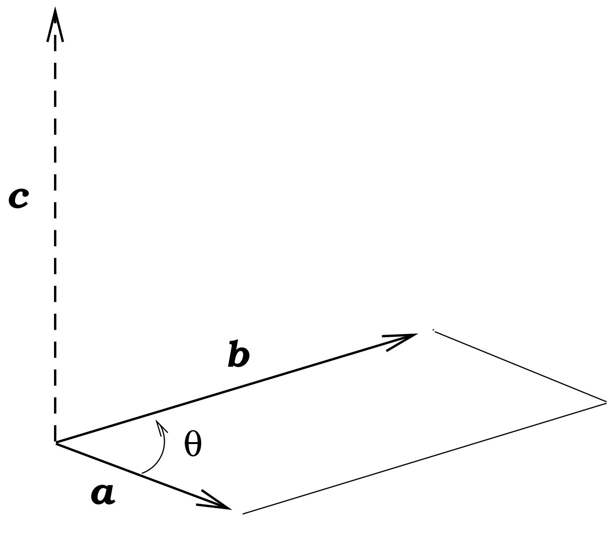


**Figura 1.** Definizione del prodotto vettoriale $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

Il prodotto vettoriale di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ sarà denotato

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}. \tag{2}$$

È da notare che si trovano molto spesso altre notazioni, fra cui, in Italia, è frequente $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$, che però è meglio riservare ad altre nozioni matematiche.

### *1.2. Proprietà elementari*

Le seguenti proprietà elementari possono essere dedotte quasi immediatamente dalla definizione:

a) Il prodotto vettoriale *non è commutativo*: si ha in effetti

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -\left(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\right). \tag{3}$$

Questa proprietà è chiamata la *proprietà anticommutativa del prodotto*. In effetti, scambiando fra loro $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, si cambia, secondo la definizione, il verso di $\boldsymbol{c}$.

b) Se $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ sono paralleli, il prodotto vettoriale è nullo, perché l'angolo $\theta$ (e quindi $\sin\theta$) si annulla. Questo permette di non preoccuparsi dell'ambiguità con cui, in questo caso, è definito il piano che contiene $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.

c) Il prodotto vettoriale è distributivo rispetto al prodotto per uno scalare: dato il numero reale $\lambda$, si ha infatti

$$(\lambda\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \lambda\left(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\right) = \boldsymbol{a} \times (\lambda\boldsymbol{b}). \tag{4}$$

La dimostrazione di questa proprietà *nel caso generale* (in cui $\lambda$ può essere positivo, nullo, o negativo) è un semplice ma utile esercizio.

Segue dalla seconda proprietà che, per il prodotto vettoriale, *non vale la legge di annullamento del prodotto*: il prodotto vettoriale può essere nullo anche se ambo i vettori che lo definiscono non sono nulli.

È meno immediatamente evidente che il prodotto vettoriale è distributivo *anche rispetto alla somma di due o più vettori*. Si ha cioè

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}, \tag{5}$$

e l'analoga proprietà quando la somma appare come primo fattore. Suggerisco a chi si sente sicuro della propria trigonometria di provare a dimostrare direttamente questa proprietà. Noi seguiremo una strada diversa. L'ammetteremo per vera, e ne dedurremo l'espressione del prodotto vettoriale in funzione delle coordinate dei fattori. Poi mostreremo che l'espressione così ottenuta corrisponde alla definizione geometrica che abbiamo dato più sopra.

### *1.3. Espressione del prodotto vettoriale in funzione delle coordinate*

Supponiamo di definire una terna $Oxyz$ di assi cartesiani, e denotiamo rispettivamente con $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$ i versori degli assi $x$, $y$ e $z$. È importante supporre che la terna sia *orientata positivamente*, cioè che $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$ (nell'ordine) obbediscano alla regola della mano destra.

Allora è facile ottenere le seguenti relazioni fra i prodotti vettoriali dei versori degli assi:

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}; \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}; \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}. \tag{6}$$

D'altra parte, per la proprietà anticommutativa del prodotto, si ha

$$\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}; \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}; \quad \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j}. \tag{7}$$

Si ha inoltre, per l'annullarsi del prodotto vettoriale di vettori paralleli,

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0. \tag{8}$$

Supponendo ora che valgano le proprietà distributive del prodotto vettoriale rispetto alla moltiplicazione per uno scalare e alla somma vettoriale, possiamo ottenere l'espressione del prodotto vettoriale dei vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ in funzione delle loro coordinate.

Esprimiamo i vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ come combinazione lineare dei versori degli assi: i coefficienti sono evidentemente le coordinate dei vettori rispetto agli assi. Si ha

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}; \quad \boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}. \tag{9}$$

Valutiamo adesso $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} =& \ (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) \times (b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) \\
=& \ a_xb_x\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} + a_xb_y\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} + a_xb_z\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} \\
&+ a_yb_x\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} + a_yb_y\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} + a_yb_z\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} \\
&+ a_zb_x\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} + a_zb_y\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} + a_zb_z\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} \\
=& \ (a_yb_z - a_zb_y)\,\boldsymbol{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\,\boldsymbol{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\,\boldsymbol{k}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Per ottenere questa relazione, abbiamo sfruttato le (6), (7) e (8).

Notiamo che questa relazione si può elegantemente esprimere come un determinante:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}, & \boldsymbol{j}, & \boldsymbol{k} \\ a_x, & a_y, & a_z \\ b_x, & b_y, & b_z \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Adesso possiamo mostrare che questa espressione coincide con la definizione geometrica del prodotto vettoriale che abbiamo dato all'inizio. In effetti, calcolando il prodotto scalare di $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ con $\boldsymbol{a}$ o $\boldsymbol{b}$, è facile vedere che il prodotto vettoriale così definito è perpendicolare tanto ad $\boldsymbol{a}$ che a $\boldsymbol{b}$. Si ha per esempio,

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} =& \ (a_yb_z - a_zb_y)\,a_x + (a_zb_x - a_xb_z)\,a_y + (a_xb_y - a_yb_x)\,a_z \\
=& \ a_xa_yb_z - a_xb_ya_z + b_xa_ya_z - a_xa_yb_z + a_xb_ya_z - b_xa_ya_z \\
=& \ 0.
\end{aligned}$$

D'altra parte, sapendo che il coseno dell'angolo $\theta$ compreso fra $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ è dato da

$$\begin{aligned}
\cos\theta =& \ \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} \\
=& \ \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}},
\end{aligned} \tag{12}$$

otteniamo che il seno dell'angolo $\theta$ è dato dalla determinazione non negativa di $\sqrt{1 - \cos^2\theta}$. Abbiamo così

$$\sin^2\theta = 1 - \frac{(a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z)^2}{\left(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2\right)\left(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2\right)}.$$

Valutiamo adesso $a^2b^2\sin^2\theta$. Sviluppando questa espressione è facile vedere che

$$\begin{aligned}
a^2b^2\sin^2\theta =& \ \left(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2\right)\left(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2\right) \\
&- (a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z)^2 \\
=& \ a_x^2b_x^2 + a_x^2b_y^2 + a_x^2b_z^2 + a_y^2b_x^2 + a_y^2b_y^2 + a_y^2b_z^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + a_z^2 b_x^2 + a_z^2 b_y^2 + a_z^2 b_z^2 - a_x^2 b_x^2 - a_y^2 b_y^2 - a_z^2 b_z^2 \\
&\quad - 2a_x a_y b_x b_y - 2a_x a_z b_x b_z - 2a_y a_z b_y b_z \\
&= a_x^2 b_y^2 - 2a_x a_y b_x b_y + a_y^2 b_x^2 + a_y^2 b_z^2 - 2a_y a_z b_y b_z + a_z^2 b_y^2 \\
&\quad + a_z^2 b_x^2 - 2a_z a_x b_z b_x + a_x^2 b_z^2 \\
&= \left[ (a_x b_y - a_y b_x)^2 + (a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 \right] \\
&= |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2,
\end{aligned}
$$

dove $a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ e analogamente per $b$. Che il verso del prodotto vettoriale sia quello "giusto" può essere visto considerando il caso particolare in cui i vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ giacciono nel piano $xy$.

Notiamo che dalla definizione geometrica segue che il prodotto vettoriale di due vettori rimane invariato quando si cambia il sistema di riferimento mediante una rotazione. In questo caso cambieranno le coordinate del prodotto, ma il vettore prodotto rimane invariato. Ma il cambiamento delle coordinate può anche essere interpretato come dovuto alla trasformazione dei fattori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ mediante una rotazione inversa: e la stessa trasformazione sarà applicata al vettore prodotto $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$. Quindi, se applichiamo una determinata rotazione ai fattori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, il vettore prodotto sarà trasformato della stessa rotazione. Questo risultato può essere verificato direttamente valutando l'effetto di una rotazione sull'espressione del prodotto vettoriale in funzione delle coordinate.

D'altra parte è essenziale che la terna degli assi cartesiani rispetto a cui vengono valutate le coordinate sia orientata positivamente. È facile vedere, infatti, che se essa fosse orientata negativamente l'espressione ottenuta dalle coordinate sarebbe pari all'opposto di $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$. (Questo si può verificare passando, per esempio, dalla terna $Oxyz$ alla terna $O(-x)(-y)(-z)$, e cioè cambiando segno a tutte le coordinate, e il verso a tutti i versori degli assi.)

## 2. Momento angolare

### *2.1. Definizione*

Consideriamo un punto materiale di massa $m$, animato da una velocità $\boldsymbol{v}$, che si trovi nel punto P dello spazio. Indichiamo con $\boldsymbol{r}$ il raggio vettore che porta da un punto arbitrario A al punto P. Allora il **momento angolare** del punto materiale rispetto al punto A è definito da

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}, \tag{13}$$

dove $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ è la quantità di moto del punto materiale. Il momento angolare è chiamato quindi spesso **momento della quantità di moto**. Notiamo alcune proprietà del momento angolare:

a) La definizione del momento angolare dipende da un punto arbitrario che abbiamo indicato con A. Vediamo qual è la relazione fra il momento $\boldsymbol{M}_{\mathrm{A}}$ del momento angolare definito rispetto a un punto A con quello, indicato con $\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}}$ definito rispetto al punto B. Indichiamo con $\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}$ il raggio vettore che porta dal punto A al punto B, e con $\boldsymbol{r}'$ il raggio vettore del punto P rispetto a B, Si ha quindi

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}.$$

Otteniamo così

$$\boldsymbol{M}_\mathrm{B} = \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} - \boldsymbol{r}_\mathrm{B} \times \boldsymbol{p}.$$

Quindi

$$\boldsymbol{M}_\mathrm{B} = \boldsymbol{M}_\mathrm{A} - \boldsymbol{r}_\mathrm{B} \times \boldsymbol{p}. \tag{14}$$

La cosa interessante è che il secondo termine non dipende dalla posizione del punto materiale nello spazio. Questa osservazione ci sarà utile quando ci occuperemo del momento angolare di un insieme di punti materiali.

b) Supponiamo adesso che il punto materiale sia libero, e quindi si muova inerzialmente con velocità $\boldsymbol{v}$ costante. In queste condizioni, il momento angolare $\boldsymbol{M}$ rispetto a un punto arbitrario è anch'esso costante. Per vederlo più facilmente, scegliamo un sistema di riferimento in cui il piano $xy$ coincide con il piano che contiene il punto A, rispetto a cui valutiamo il momento angolare, il punto P, in cui la particella si trova in un qualche istante, ed è parallelo alla velocità $\boldsymbol{v}$. In questo caso, dato che tanto $\boldsymbol{v}$ (e quindi $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$) che il raggio vettore $\boldsymbol{r}$ sono paralleli al piano $xy$, e $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ deve essere perpendicolare a entrambi, esso sarà diretto lungo l'asse $z$. Il modulo di $\boldsymbol{M}$ è pari all'area del parallelogramma definito da $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{p}$. Il momento angolare $\boldsymbol{M}$ mantiene però la stessa direzione (l'asse $z$) e lo stesso verso. Il suo modulo è pari all'area del parallelogramma definito da $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{p}$. Evidentemente $\boldsymbol{p}$ è costante, ma $\boldsymbol{r}$ varia. Tuttavia l'altezza del parallelogramma è data dalla distanza $b$ tra il punto A e la traiettoria del punto materiale, come si vede dalla figura 2. Quindi l'area del parallelogramma, essendo uguale a base $\times$ altezza, è costante.

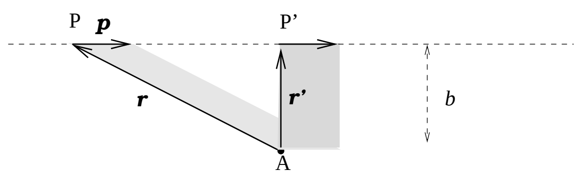


**Figura 2.** Conservazione del momento angolare per una particella libera. Le aree dei parallelogrammi tratteggiati sono uguali.

Un'altra istruttiva maniera di ottenere questo risultato è quello di considerare che la differenza fra il valore $\boldsymbol{M}'$ del momento a un certo istante $t'$ e il corrispondente valore $\boldsymbol{M}$ ad un altro istante $t$, dato che la velocità $\boldsymbol{v}$ è costante, è dato da

$$\boldsymbol{M}' - \boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}' \times m\boldsymbol{v} - \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}) \times m\boldsymbol{v}, \tag{15}$$

dove $\boldsymbol{r}'$ è il raggio vettore all'istante $t'$ e $\boldsymbol{v}$ quello all'istante $t$. Ma si ha

$$\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} = (t' - t)\ \boldsymbol{v}, \tag{16}$$

poiché la velocità $\boldsymbol{v}$ è costante. Quindi

$$\boldsymbol{M}' - \boldsymbol{M} = (t' - t)\ \boldsymbol{v} \times (m\boldsymbol{v}) = 0, \tag{17}$$

dato che il prodotto vettoriale di vettori paralleli si annulla.

*2.1.1. Velocità areolare.* Consideriamo un'altra sorprendente conseguenza della conservazione del momento angolare rispetto al punto arbitrario A. Consideriamo il raggio vettore $\boldsymbol{r}(t)$ che porta, istante per istante, dal punto A al punto P, variabile nel tempo, in cui si trova il punto materiale che stiamo considerando. In un dato intervallo di tempo $[t_0, t]$ il raggio vettore $\boldsymbol{r}(t)$ "spazza" una regione triangolare che ha il vertice in A e la cui base poggia sulla traiettoria del punto materiale. L'area $S$ di questa regione è pari alla base (di lunghezza $v\,\Delta t$ per l'altezza (che abbiamo denotato con $b$), diviso 2. Si ha quindi

$$S = \frac{1}{2}\, vb\ (t - t_0)\,, \tag{18}$$

dove $v = |\boldsymbol{v}|$ è il modulo della velocità e $b$ la distanza del punto arbitrario A dalla traiettoria rettilinea del corpo.

Definiamo **velocità areolare**, e indichiamo con $\Sigma$, l'incremento dell'area spazzata dal raggio vettore nell'unità di tempo. Considerando un intervallo di tempo di durata $\Delta t$ abbiamo

$$\Sigma = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \tag{19}$$

Otteniamo quindi

$$\Sigma = \frac{1}{2}\, vb = \frac{1}{2m}\, pb. \tag{20}$$

È facile vedere che

$$|\Sigma| = \frac{1}{2m} |\boldsymbol{M}|. \tag{21}$$

Vedi per esempio la figura 3. Questa relazione è evidentemente valida istante per istante, anche se $\boldsymbol{M}$ non è costante. In ogni caso possiamo dedurne che, se $\boldsymbol{M}$ è costante, e la massa $m$ della particella non varia, la velocità areolare $\Sigma$ rimane costante.

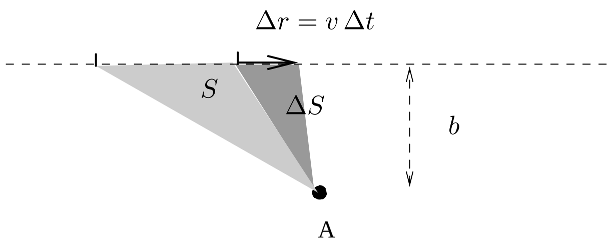


**Figura 3.** Velocità areolare per una particella libera. L'incremento $\Delta S$ dell'area spazzata nell'intervallo di tempo di durata $\Delta t$ è pari a $\Delta S = \frac{1}{2} vb\,\Delta t$.

## 3. Teorema del momento angolare

Consideriamo un punto materiale che si trovi in un punto P dello spazio, e a cui è applicata una forza $\boldsymbol{f}$. Il **momento della forza** applicata al punto materiale rispetto a un punto arbitrario A è definito da

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}, \tag{22}$$

dove $\boldsymbol{r}$ è il raggio vettore che da A porta a P.

La definizione di questa quantità risale ad Archimede, nel suo studio sulle leve. La considereremo più in dettaglio più avanti. Per ora vediamo l'importante relazione che collega il momento angolare di un punto materiale al momento della forza totale applicata ad esso.

Consideriamo un punto materiale di massa $m$ posto, a un certo istante, nel punto P e animato da una velocità $\boldsymbol{v}$. Supponiamo che esso sia soggetto a delle forze, la cui risultante è $\boldsymbol{f}$. Scegliamo un punto arbitrario A, e valutiamo il momento angolare del nostro punto materiale rispetto ad A. Si ha allora:

> *La derivata del momento angolare $\boldsymbol{M}$ (preso rispetto ad A) rispetto al tempo è uguale al momento $\boldsymbol{L}$ della forza risultante (sempre preso rispetto ad A).*

Questo risultato è noto come **teorema del momento angolare**.

Per convincerci di questo risultato, consideriamo la variazione del momento angolare $\boldsymbol{M}$ tra un istante $t$ e un istante vicino $t + \mathrm{d}t$. All'istante $t$, il raggio vettore $\boldsymbol{r}$ che da A porta alla posizione istantanea P del nostro punto materiale vale $\boldsymbol{r}$, e la sua quantità di moto vale $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$. All'istante $t + \mathrm{d}t$, si ha (a meno di infinitesimi di ordine superiore)

$$\boldsymbol{r}(t + \mathrm{d}t) = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t, \tag{23}$$

$$\boldsymbol{p}(t + \mathrm{d}t) = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}t. \tag{24}$$

Valutiamo la variazione $\mathrm{d}\boldsymbol{M}$ del momento angolare. Si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{M} &= \boldsymbol{M}(t + \mathrm{d}t) - \boldsymbol{M}(t)\\
&= \boldsymbol{r}(t + \mathrm{d}t) \times m\boldsymbol{v}(t + \mathrm{d}t) - \boldsymbol{r}(t) \times m\boldsymbol{v}(t)\\
&= \boldsymbol{r}(t + \mathrm{d}t) \times m(t + \mathrm{d}t) - \boldsymbol{r}(t) \times m\boldsymbol{v}(t + \mathrm{d}t)\\
&\qquad + \boldsymbol{r}(t) \times m\boldsymbol{v}(t + \mathrm{d}t) - \boldsymbol{r}(t) \times m\boldsymbol{v}(t)\\
&= [\boldsymbol{r}(t + \mathrm{d}t) - \boldsymbol{r}(t)] \times m\boldsymbol{v}(t + \mathrm{d}t)\\
&\qquad + \boldsymbol{r}(t) \times m\,[\boldsymbol{v}(t + \mathrm{d}t) - \boldsymbol{v}(t)]\,.
\end{aligned} \tag{25}$$

Passando al limite otteniamo

$$\mathrm{d}\boldsymbol{M} = [\dot{\boldsymbol{r}} \times m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \times m\dot{\boldsymbol{v}}]\,\mathrm{d}t, \tag{26}$$

che mostra che per il prodotto vettoriale vale l'ordinaria regola di derivazione del prodotto. In questa espressione, come d'uso, indichiamo con un punto la derivata presa rispetto al tempo:

$$\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Tenendo conto delle (23) e (24) otteniamo

$$\mathrm{d}\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{v} \times m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}]\,\mathrm{d}t. \tag{27}$$

Il primo termine si annulla perché il prodotto vettoriale fra vettori paralleli è nullo. Dividendo per la durata infinitesima $\mathrm{d}t$ dell'intervallo temporale, otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f} = \boldsymbol{L}, \tag{28}$$

che è quello che volevamo dimostrare.

Da questo risultato segue come corollario la costanza di $\boldsymbol{M}$ per una particella libera. Si ha in effetti, per $\boldsymbol{L} = 0$, $\mathrm{d}\boldsymbol{M}/\mathrm{d}t = 0$, da cui segue $\boldsymbol{M} = \text{cost.}$