Energia potenziale

L. P.

Maggio 2007

1. Campo di forze

Consideriamo un punto materiale di massa m che si muove in una certa regione dello spazio. Si dice che esso è soggetto a un **campo di forze**, se ad ogni punto P è assegnata la forza che sarebbe applicata al corpo se si trovasse in quel punto. Se scegliamo una terna $Oxyz$ di assi cartesiani, la posizione P del corpo è identificata dal raggio vettore $\boldsymbol{r}$ che porta in P dall'origine O degli assi. Il campo di forze può essere espresso quindi come una funzione vettriale $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$ che esprime la forza $\boldsymbol{f}$ in funzione del raggio vettore $\boldsymbol{r}$.

La forza-peso è l'esempio più semplice di campo di forze. In questo caso la forza che agisce su un corpo di massa m è pari a $m\boldsymbol{g}$, dove $\boldsymbol{g}$ è l'accelerazione di gravità, ed è (approssimativamente) indipendente da P. Si dice che la forza-peso è un esempio di **campo uniforme**.

Un altro esempio è dato dalla **forza elastica**, in cui la forza è proporzionale alla distanza da un punto O, ed è diretta verso di esso: posta l'origine degli assi in O, si ha

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) = -\kappa \boldsymbol{r}, \tag{1}$$

dove κ è la **costante di Hooke**.

1.1. Campo di forze conservativo

Consideriamo un punto materiale soggetto a un campo di forze, e valutiamo il lavoro compiuto dalle forze del campo quando il corpo si sposta da un punto P caratterizzato dal raggio vettore $\boldsymbol{r}$ a un punto P′, ad esso vicino, caratterizzato dal raggio vettore $\boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r}$. Si ha

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{2}$$

dove il punto indica il **prodotto scalare**. Indicando con $(f_x(\boldsymbol{r}), f_y(\boldsymbol{r}), f_z(\boldsymbol{r}))$ le coordinate della forza rispetto alla nostra terna di assi cartesiani, e con $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ le coordinate di $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, otteniamo

$$\mathrm{d}w = f_x(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}x + f_y(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}y + f_z(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}z. \tag{3}$$

Notiamo che un vettore arbitrario $\boldsymbol{a}$ di coordinate (a_x, a_y, a_z) può essere comodamente rappresentato come una combinazione lineare dei **versori degli assi** $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}a_x + \boldsymbol{j}a_y + \boldsymbol{k}a_z. \tag{4}$$

Utilizzando questa rappresentazione per $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$ e per $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, la proprietà distributiva del prodotto scalare

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}), \tag{5}$$

e i prodotti scalari fra i versori degli assi

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1; \tag{6}$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = 0; \tag{7}$$

si può ottenere questa relazione in maniera quasi automatica.

Supponiamo adesso di spostare il punto da un punto A a un punto B, seguendo un determinato cammino. Il lavoro totale della forza sarà dato dalla somma dei lavori infinitesimi $\mathrm{d}W$ lungo il cammino:

$$W = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{8}$$

In generale, questo lavoro dipenderà, oltre che dalla posizione iniziale e finale, anche dal particolare cammino che si suppone che il corpo debba percorrere. Tuttavia, in diversi casi particolari, questo lavoro viene a dipendere solo dagli estremi A e B. In questo caso, il campo di forze è detto **conservativo**.

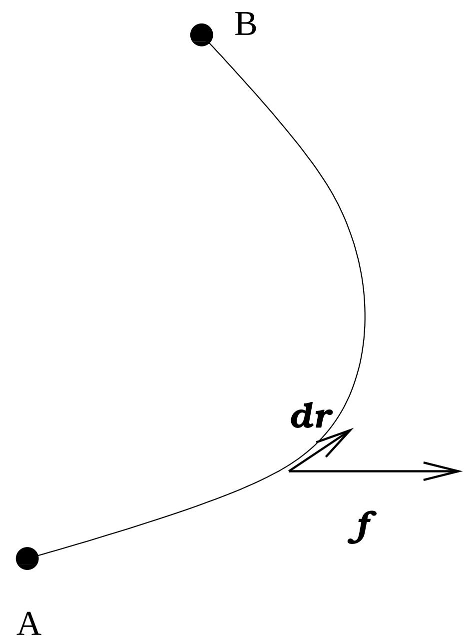

Figura 1. Lavoro in un campo di forze.

Riassumendo,

Un campo di forze $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$, agenti su un determinato punto materiale, è detto ***conservativo*** *se il lavoro delle forze compiuto nello spostare il corpo considerato da un punto A a un punto B dipende solo dagli estremi A e B e non dal particolare cammino che si suppone di percorrere.*

Segue come corollario da questa definizione che, in un campo di forze conservativo, *il lavoro compiuto in un cammino chiuso è sempre nullo.* In effetti si può andare da un punto arbitrario A ad A seguendo un arbitrario cammino chiuso che comincia e finisce in A, o semplicemente non spostandosi. Ma in questo caso, dato che $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$, si ha $W = 0$. In un altro modo, consideriamo un cammino chiuso che da A porta in A, passando per un altro punto B. Allora il lavoro totale lungo questo cammino può essere ottenuto come il lavoro compiuto lungo il cammino d'andata da A a B, più il lavoro compiuto nel cammino di ritorno da B ad A. Questo secondo lavoro, però, e pari all'*opposto* del lavoro che si otterrebbe percorrendo all'inverso il cammino di ritorno da A verso B. In effetti, in questo caso, in ogni punto la forza $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$ sarebbe la stessa, mentre cambierebbe il segno di $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$. Abbiamo quindi

$$W = W^{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}_{\mathrm{andata}} - W^{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}_{\mathrm{ritorno}}. \tag{9}$$

Ma, in un campo conservativo, $W^{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$ dipende solo dagli estremi A e B, e non dal particolare cammino percorso. Si ha quindi $W = 0$ per un cammino chiuso. È vero

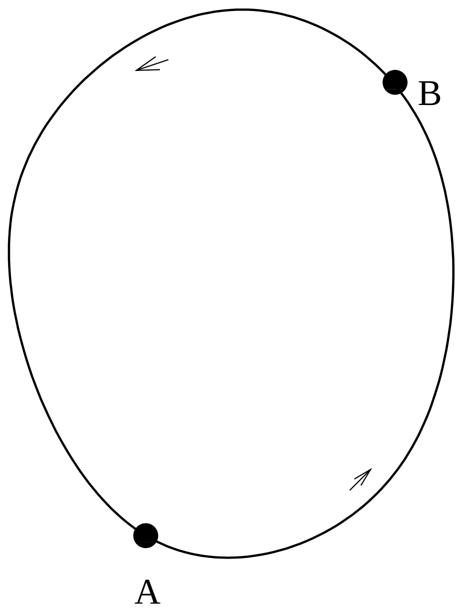

Figura 2. Lavoro lungo un ciclo in un campo conservativo.

anche il reciproco: se $W = 0$ per ogni cammino chiuso, allora W in un cammino aperto dipende solo dagli estremi e non dal particolare cammino percorso. Questo risultato può essere dimostrato molto facilmente e viene lasciato come esercizio.

1.2. Conservatività della forza-peso e della forza elastica

Il concetto di campo di forze conservativo è utile perché un gran numero di forze fondamentali sono conservative. In questo paragrafo mostreremo che ciò è vero per la forza-peso e per la forza elastica.

Nel caso della forza-peso, scegliamo gli assi cartesiani in modo che il piano xy sia orizzontale e l'asse z sia verticale e diretto verso l'alto. Allora la forza-peso che agisce su un punto materiale di massa m è uniforme e pari a $\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{g}$, dove $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{k}$ (qui $\boldsymbol{k}$ è il versore dell'asse z). Consideriamo uno spostamento infinitesimo $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\,\mathrm{d}x + \boldsymbol{j}\,\mathrm{d}y + \boldsymbol{k}\,\mathrm{d}z$. Il prodotto $\boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ è pari a

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -mg\,\mathrm{d}z. \tag{10}$$

Se integriamo questa espressione lungo un cammino che parte dal punto A di coordinate (a_x, a_y, a_z) e termina nel punto B di coordinate (b_x, b_y, b_z), otteniamo

$$W = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}W = -mg(b_z - a_z), \tag{11}$$

indipendente dal cammino percorso. Il campo della forza-peso è quindi conservativo.

Consideriamo adesso il caso della forza elastica $\boldsymbol{f} = -\kappa\boldsymbol{r}$. Poniamo l'origine degli assi nel punto in cui la forza si annulla. Notiamo che la forza è proporzionale alla distanza r dall'origine ed è parallela al raggio vettore.Valutiamo il prodotto scalare $\boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ in coordinate cartesiane. Poiché $\boldsymbol{f} = -\kappa\,(\boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z)$, si ottiene

$$\mathrm{d}W = -\kappa\,(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z)\,. \tag{12}$$

Integrando lungo un cammino che da A, di coordinate (a_x, a_y, a_z), porta a B, di coordinate (b_x, b_y, b_z), otteniamo

$$W = -\frac{1}{2}\kappa\left(\left[x^2\right]_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} + \left[y^2\right]_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} + \left[z^2\right]_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\right). \tag{13}$$

Questa espressione può essere scritta

$$W = -\frac{1}{2}\kappa r_{\mathrm{B}}^2 + \frac{1}{2}\kappa r_{\mathrm{A}}^2, \tag{14}$$

dove $r_{\mathrm{P}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ è la distanza del punto P dall'origine. Anche in questo caso, quindi, W non dipende dal cammino percorso.

1.3. Criterio di conservatività

È utile poter valutare se un dato campo di forze $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$ sia o meno conservativo senza valutare gli integrali $\int \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ su cammini arbitrari. In effetti, se un campo di forze è conservativo, le derivate delle componenti della forza $\boldsymbol{f}$ rispetto alla posizione debbono soddisfare in ogni punto certe relazioni.

Consideriamo il lavoro compiuto dalla forza nello spostamento del corpo da un punto di raggio vettore $\boldsymbol{r}$ a un punto di raggio vettore $\boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r}$, dove prenderemo $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ nel piano xy per semplicità. Consideriamo due diversi cammini:

a) Prima ci spostiamo parallelamente all'asse x, poi parallelamente all'asse y;

b) Prima ci spostiamo parallelamente all'asse y, poi parallelamente all'asse x.

Calcoliamo il lavoro nel caso a). Tralascio di indicare la dipendenza di $\boldsymbol{f}$ dalla coordinata z, che resta costante. Abbiamo così

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W_{\mathrm{a}} &= f_x(x,y)\mathrm{d}x + f_y(x+\mathrm{d}x,y)\mathrm{d}y\\ &\simeq f_x(x,y)\mathrm{d}x + f_y(x,y)\mathrm{d}y + \left.\frac{\partial f_y}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{15}$$

In questa espressione, $\partial f_y/\partial x)_y$ è la **derivata parziale** di f_y rispetto a x (a y costante), definita da

$$\left.\frac{\partial f_y}{\partial x}\right)_y = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_y(x+\Delta x,y) - f_y(x,y)}{\Delta x}. \tag{16}$$

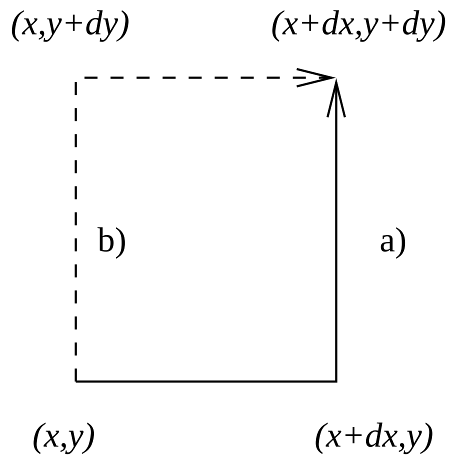

Figura 3. Lavoro infinitesimo valutato per due cammini diversi.

Analogamente, per il caso b), otteniamo

$$\begin{aligned} \mathrm{d}W_{\mathrm{b}} &= f_y(x,y)\mathrm{d}y + f_x(x,y+\mathrm{d}y)\mathrm{d}x \\ &\simeq f_y(x,y)\mathrm{d}y + f_x(x,y)\mathrm{d}x + \left.\frac{\partial f_x}{\partial y}\right)_x \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{17}$$

Quindi

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{a}} - \mathrm{d}W_{\mathrm{b}} = \left[\left.\frac{\partial f_y}{\partial x}\right)_y - \left.\frac{\partial f_x}{\partial y}\right)_x\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{18}$$

Quindi, se il campo è conservativo, si deve avere, in ogni punto del campo

$$\left.\frac{\partial f_y}{\partial x}\right)_y - \left.\frac{\partial f_x}{\partial y}\right)_x = 0. \tag{19}$$

Relazioni analoghe debbono valere per le altre coppie di coordinate.

Abbiamo così mostrato che, se il campo di forze $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$ è conservativo, debbono valre in ogni punto relazioni del tipo della (19) per ogni coppia di coordinate.

Vale anche il risultato reciproco: se in tutta una regione Ω di spazio **semplicemente connessa** valgono le relazioni del tipo della (19) fra tutte le coppie di coordinate, il campo è conservativo. Si dice che una regione è *semplicemente connessa* se, dato un qualunque cammino chiuso $\mathcal{C}$, è possibile modificarlo con continuità fino a ridurlo a un punto. Per esempio, una sfera piena nello spazio è semplicemente connessa, perché un cammino $\mathcal{C}$ tutto contenuto all'interno della sfera può essere deformato con continuità fino a ridursi a un punto, mentre una ciambella non lo è, perché il cerchio al centro della ciambella non può essere deformato con continuità fino a ridursi a un punto.

Per dimostrare questo risultato, mostriamo che, se le relazioni (19) valgono in tutal la regione di spazio in cui è contenuto un cammino $\mathcal{C}$, e $\mathcal{C}'$ è un cammino prossimo a $\mathcal{C}$, allora $W(\mathcal{C}')$ è uguale a $W(\mathcal{C})$. Evidentemente, una volta appurato questo risultato, potremo immaginare di deformare il cammino $\mathcal{C}$, senza cambiare W, fino a ridurlo a un punto, per il quale evidentemente $W = 0$.

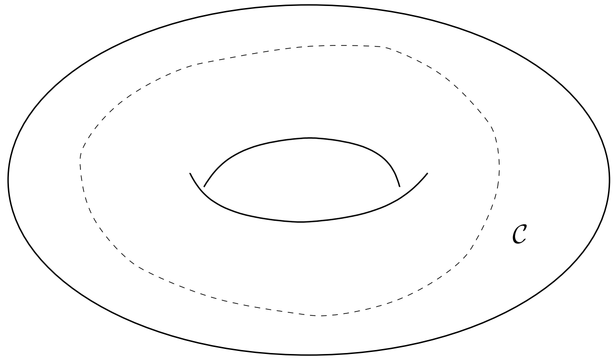

Figura 4. Il cammino $\mathcal{C}$ non può essere ridotto ad un punto mediante una deformazione continua, che lo mantenga sempre all'interno del toro.

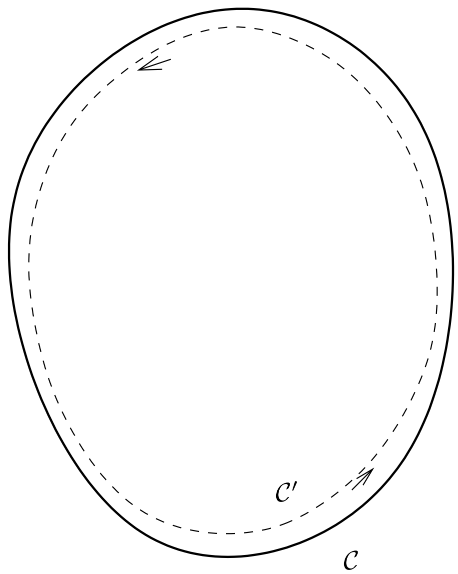

Figura 5. Deformazione di cicli.

Supponiamo adesso di valutare $W(\mathcal{C}') - W(\mathcal{C})$ sommando diversi contributi, ognuno dei quali è ottenuto da un piccolo ciclo. In questo piccolo ciclo, percorriamo prima un tratto di $\mathcal{C}$ nel suo verso, poi facciamo un piccolo tratto che ci porta su $\mathcal{C}'$, percorriamo un piccolo tratto di $\mathcal{C}'$ nel verso contrario, e finalmente torniamo al punto di partenza su $\mathcal{C}$. Supponiamo che questi cicli siano tanto piccoli che possiamo applicare le formule ottenute più sopra per esprimere $\mathrm{d}W$ lungo un picoclo ciclo chiuso. Poiché valgono le (19), l'integrale su ciascun piccolo ciclo sarà uguale a 0. D'altra parte, è facile vedere che il contributo del cammino da $\mathcal{C}'$ a $\mathcal{C}$ in chiusura di un ciclo si cancella quando lo si somma con il contributo del cammino da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$ nel piccolo ciclo adiacente, per cui la somma dei contributi di tutti i piccoli cicli è proprio uguale alla differenza $W(\mathcal{C}) - W(\mathcal{C}')$. Ma abbiamo visto che questa differenza è nulla, perché il contributo di ciascun ciclo si annulla. Quindi $W(\mathcal{C})$ è nullo per ogni ciclo $\mathcal{C}$, e il campo è conservativo, come volevamo dimostrare.

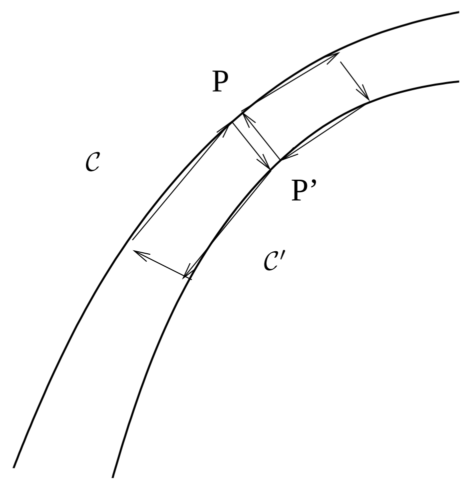

Figura 6. Approssimazione di $W(\mathcal{C}) - W(\mathcal{C}')$ mediante la somma su piccoli cicli. Notare come i contributi dei cammini che collegano $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$ si annullino due a due.

2. Energia potenziale

Mostriamo adesso che, dato un campo di forze conservativo $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$, è possibile definire una funzione *scalare* $U(\boldsymbol{r})$ che ne riassume le proprietà. Fissiamo un punto arbitrario O e consideriamo il lavoro W che le forze compiono nel portare il punto da O al punto variabile P. Questa quantità viene considerata come una funzione di P, o, se preferiamo, del suo raggio vettore $\boldsymbol{r}$. Definiamo **energia potenziale** del campo $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$, e denotiamo con $U(\boldsymbol{r})$, questa quantità W *cambiata di segno.* Si ha quindi, per definizione,

$$U(\boldsymbol{r}) = -\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{P}} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{r}, \tag{20}$$

dove si suppone che $\boldsymbol{r}$ sia il raggio vettore di P, e che l'integrale sia esteso a un qualunque cammino che da O porta a P.

Vediamo come la conoscenza della funzione $U(\boldsymbol{r})$ ci dia una descrizione *completa* del campo di forze $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$. Per prima cosa, osserviamo il seguente risultato:

> *Il lavoro compiuto dalle forze del campo nello spostare il corpo dal punto A al punto B è uguale alla differenza fra l'energia potenziale in A e quella in B.*

Consideriamo infatti il cammino che da O porta in A, e successivamente da A porta in B. Otteniamo un cammino che da O porta in B, sul quale, per definizione, il lavoro vale $-U(\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}})$, dove $\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}$ è il raggio vettore di B. Ma questo lavoro è pari al lavoro compiuto sul cammino che da O porta ad A, che vale per definizione $-U(\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}})$, più il lavoro W_{AB} compiuto lungo il cammino che da A porta a B. Quindi

$$-U(\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}) = -U(\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}) + W_{\mathrm{AB}}, \tag{21}$$

e cioè

$$W_{\mathrm{AB}} = U(\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}) - U(\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}). \tag{22}$$

D'altra parte, la conoscenza della funzione $U(\boldsymbol{r})$ in ogni punto permette di valutare la forza $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$ in ogni punto mediante una semplice derivazione. Supponiamo infatti di valutare il lavoro $\mathrm{d}W$ che le forze del campo operano su un punto che si sposta dalla posizione $\boldsymbol{r}$ alla posizione $\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r}$. Indichiamo con $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ le coordinate di $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$. Otteniamo

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y + f_z\,\mathrm{d}z. \tag{23}$$

D'altra parte, come abbiamo appena visto,

$$\mathrm{d}W = U(\boldsymbol{r}) - U(\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r}). \tag{24}$$

Indichiamo con $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ le coordinate di $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$. Abbiamo, per definizione delle derivate parziali

$$\mathrm{d}U = U(\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r}) - U(\boldsymbol{r}) = \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{yz}\mathrm{d}x + \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{zx}\mathrm{d}y + \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{xy}\mathrm{d}z. \tag{25}$$

Uguagliando $\mathrm{d}W$ (23) con $-\mathrm{d}U$ (25), dato che $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ è arbitrario, otteniamo

$$f_x = -\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{yz}; \tag{26}$$

$$f_y = -\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{zx}; \tag{27}$$

$$f_z = -\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{xy}. \tag{28}$$

Questa relazione si può esprimere in maniera più compatta se introduciamo la convenzione per cui la derivata di una funzione U rispetto a un vettore $\boldsymbol{r}$ è un vettore, le cui componenti sono, rispettivamente, le derivate perziali di U rispetto alle corrispondenti coordinate di $\boldsymbol{r}$:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \boldsymbol{i}\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{yz} + \boldsymbol{j}\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{zx} + \boldsymbol{k}\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{xy}. \tag{29}$$

Abbiamo allora la seguente relazione fra l'energia potenziale U e il campo di forze conservativo $\boldsymbol{f}$:

$$\boldsymbol{f} = -\frac{\partial U}{\partial r}. \tag{30}$$

Un'altra notazione utile fa uso dell'**operatore nabla**, che è formalmente definito da

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{31}$$

Se non ci facciamo troppo turbare da questa strana notazione, possiamo scrivere la relazione (30) nella forma

$$\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{\nabla}U. \tag{32}$$

Additività dell'energia potenziale. Supponiamo che il nostro corpo sia soggetto a più forze conservative, $\boldsymbol{f}_1$ di energia potenziale $U_1(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{f}_2$ con energie potenziale $U_2(\boldsymbol{r})$, ecc. Allora anche la forza risultante è conservativa, e l'energia potenziale relativa è pari alla somma delle energie potenziali di ciascuna forza.

In formule, supponendo

$$\boldsymbol{f}_{\text{tot}}(\boldsymbol{r}) = -\sum_i \frac{\partial U_i}{\partial \boldsymbol{r}}, \tag{33}$$

si ha

$$\boldsymbol{f}_{\text{tot}}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial U_{\text{tot}}}{\partial \boldsymbol{r}}, \tag{34}$$

dove

$$U_{\text{tot}}(\boldsymbol{r}) = \sum_i U_i(\boldsymbol{r}). \tag{35}$$

La dimostrazione di questa proprietà è quasi immediata, e la lascio volentieri come esercizio. Esso ha per conseguenza che, per valutare la forza risultante di più forze conservative applicate allo stesso corpo, conviene valutare l'energia potenziale totale $U_{\text{tot}}(\boldsymbol{r})$ e poi ottenere la forza risultante mediante una derivazione, piuttosto che valutando direttamente la somma vettoriale delle $\boldsymbol{f}_i$.

Derivate della forza e simmetria delle derivate miste. Le componenti della forza possono essere espresse in funzione delle derivate parziali dell'energia potenziale $U(\boldsymbol{r})$ mediante le (26,27,28). Ma le componenti della forza debbono soddisfare relazioni del tipo della (19) a causa della conservatività. In termini delle derivate parziali dell'energia potenziale, la relazione (19) assume la forma

$$\left.\frac{\partial f_y}{\partial x}\right)_{yz} = -\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)_z = \left.\frac{\partial f_x}{\partial y}\right)_{xz} = -\left.\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}\right)_z. \tag{36}$$

Otteniamo così la relazione di **simmetria delle derivate miste**:

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)_z = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}\right)_z. \tag{37}$$

È un teorema di analisi che, sotto ipotesi molto blande sulla continuità delle derivate di una funzione $\phi(x_1, x_2, \ldots)$ di più variabili, il valore delle derivate parziali miste rispetto a una data coppia di variabili (x_i, x_j) $(i \neq j)$ non dipende dall'ordine di derivazione:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i}, \qquad i \neq j. \tag{38}$$

Vediamo quindi che le (19) possono essere interpretate come le condizioni necessarie per l'esistenza della funzione energia potenziale $U(\boldsymbol{r})$ che permette di esprimere le componenti della forza mediante le (26,27,28).

3. Conservazione dell'energia meccanica

Il **teorema delle forze vive** stipula che la variazione dell'energia cinetica di un punto materiale in un determinato intervallo di tempo è pari al lavoro totale compiuto sul corpo della forze esercitate su di esso. Consideriamo un intervallo di tempo di durata infinitesima, $(t, t+\mathrm{d}t)$. L'espressione del teorema delle forze vive è allora

$$\mathrm{d}K = K(t+\mathrm{d}t) - K(t) = m\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}_{\mathrm{tot}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{39}$$

In questa espressione, $K = \frac{1}{2}mv^2$ è l'energia cinetica, $\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t+\mathrm{d}t) - \boldsymbol{v}(t)$ è la variazione della velocità $\boldsymbol{v}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\mathrm{d}t) - \boldsymbol{r}(t)$ lo spostamento infinitesimo, e $\boldsymbol{f}_{\mathrm{tot}}(\boldsymbol{r})$ è la forza risultante, che supporremo conservativa, e associata all'energia potenziale $U(\boldsymbol{r})$.

La quantità a secondo membro della (39) può essere espressa mediante l'energia potenziale:

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{tot}}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{r} = -\left(U(\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r}) - U(\boldsymbol{r})\right) = -\left(U(\boldsymbol{r}(t+\mathrm{d}t)) - U(\boldsymbol{r}(t))\right). \tag{40}$$

Dalla (39) e dalla (40) otteniamo

$$K(t+\mathrm{d}t) - K(t) = U(\boldsymbol{r}(t)) - U(\boldsymbol{r}(t+\mathrm{d}t)). \tag{41}$$

Quindi, nell'intervallo infinitesimo di durata $\mathrm{d}t$ abbiamo

$$K(t) + U(\boldsymbol{r}(t)) = \mathrm{cost.} \tag{42}$$

In altri termini, abbiamo identificato una quantità $E(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$, che dipende tanto dalla velocità $\boldsymbol{v}$ che dalla posizione $\boldsymbol{r}$ del corpo, il cui valore rimane costante nel tempo. Questa quantità è l'**energia meccanica**, e viene espressa come la somma dell'energia cinetica $K = \frac{1}{2}mv^2$ e dell'energia potenziale $U(\boldsymbol{r})$:

$$E(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}mv^2 + U(\boldsymbol{r}). \tag{43}$$

Nel caso in cui il punto materiale sia soggetto a più forze conservative, dato che l'energia potenziale della forza risultante è uguale alla somma delle energie potenziali di ciascuna forza, dovremo interpretare l'energia potenziale $U(\boldsymbol{r})$ che compare in questa espressione come la somma delle energie potenziali relative a ciascuna forza:

$$E(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}mv^2 + \sum_i U_i(\boldsymbol{r}). \tag{44}$$

Questi risultati possono essere riassunti nella **legge di conservazione dell'energia meccanica**:

> *Se a un punto materiale vengono applicate solo forze conservative, la somma della sua energia cinetica e di tutte le energie potenziali delle forze applicate rimane costante nel tempo.*

Notiamo inoltre che, se vengono applicate al corpo tanto forze conservative che non conservative, si può vedere che la variazione dell'energia meccanica in un determinato intervallo di tempo è pari al lavoro compiuto dalle forze non conservative. Questo risultato può essere ottenuto facilmente a partire dal teorema delle forze vive, distinguendo il lavoro delle forze conservative da quello delle forze non conservative, ed esprimendo il primo mediante l'energia potenziale. Questa dimostrazione viene lasciata come esercizio.