Il pendolo

L. P.

27 Marzo 2010

Il **pendolo** è un sistema meccanico costituito da un punto materiale di massa m vincolato a muoversi su una traiettoria circolare posta in un piano verticale, e sottoposto alla forza-peso. Esso può essere realizzato fisicamente collegando un piccolo peso a un filo inestensibile e di massa trascurabile fissato a un punto: in effetti, per garantire il movimento su un piano verticale, conviene collegare il peso a *due* fili, ciascuno dei quali è fissato all'altro estremo ad un punto, e i cui due punti di fissaggio si trovano sullo stesso piano orizzontale. In questo modo il corpo è vincolato a muoversi nel piano normale alla congiungente i due punti, e passante per il relativo punto medio (cf. fig. 1). In quanto

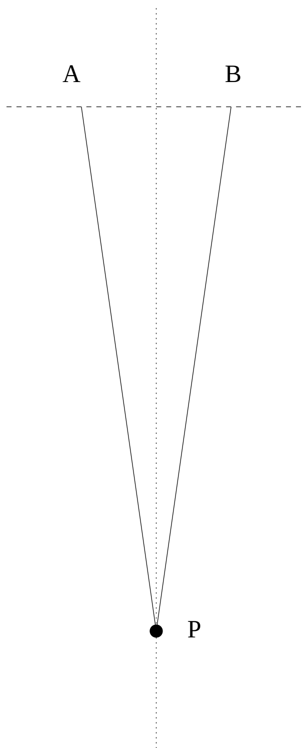

Figura 1. Realizzazione di un pendolo mendiante due fili di sospensione.

segue, fino ad avviso contrario, supporremo solo che il corpo sia vincolato a muoversi su una traiettoria circolare di centro O e di raggio ℓ, posta in un piano verticale, senza discutere su come questo vincolo venga effettivamente realizzato.

Consideriamo adesso le forze che agiscono sul corpo quando esso si trova in un punto generico P della traiettoria, tale che il raggio OP forma un angolo θ con la verticale diretta verso il basso, ed è animato da una velocità $\boldsymbol{v}$ tangente alla traiettoria, e di modulo pari a v (cf. fig. 2). Tali forze sono la forza-peso $m\boldsymbol{g}$, diretta verticalmente

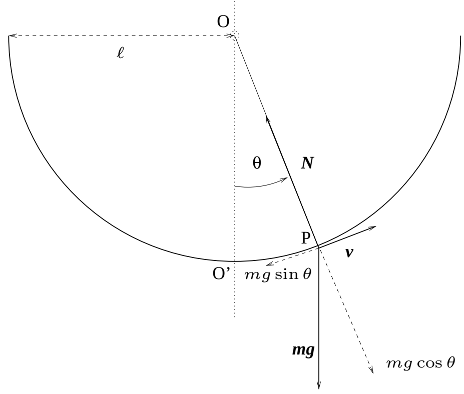

Figura 2. Forze agenti sulla massa di un pendolo.

verso il basso, e la forza vincolare $\boldsymbol{N}$, diretta lungo il raggio OP. Per fissare le idee, supponiamo che l'angolo θ di cui il raggio OP si discosta dalla verticale diretta verso il basso sia piccolo, e che sia altresì piccola la velocità v di cui è animato il corpo.

La seconda legge del moto implica che l'accelerazione $\boldsymbol{a}$ subìta dal corpo è pari alla forza risultante $\boldsymbol{f}_{\mathrm{ris}} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N}$ divisa per la massa m. Questa accelerazione ha due componenti: la componente normale alla traiettoria, $a_\perp$ è l'accelerazione centripeta (diretta parallelamente al raggio OP e verso il centro O della traiettoria), e vale v^2/ℓ in modulo; e l'accelerazione tangenziale $a_\parallel$. Consideriamo θ crescenti se il corpo si muove in verso antiorario, e decrescenti se si muove in verso orario. Allora la componente tangenziale $v_\parallel$ della velocità è data da $v_\parallel = \ell\, \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ ed è positiva se θ cresce, e negativa se diminuisce, e si ottiene

$$a_\parallel = \ell \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}. \tag{1}$$

Scomponiamo adesso le forze applicate nelle componenti tangenziale e normale alla traiettoria. Per la forza-peso si ha $mg_\perp = -mg\cos\theta$ (prendendo l'asse z diretto verticalmente verso l'alto) e $mg_\parallel = -mg\sin\theta$ (con le nostre convenzioni sul segno positivo della traiettoria). D'altra parte, la componente tangenziale della reazione vincolare si annulla. Otteniamo così l'equazione del moto, scomposta nelle direzioni normale e tangenziale alla traiettoria:

$$ma_\perp = -mg\cos\theta + N; \tag{2}$$

$$ma_\parallel = -mg\sin\theta. \tag{3}$$

La prima equazione ci permette di ricavare N, note che siano θ e $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$. La seconda equazione è un'equazione del moto per θ:

$$\ell\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -g\sin\theta. \tag{4}$$

Se consideriamo *piccole* oscillazioni, per cui vale l'approssimazione $\sin\theta \simeq \theta$, questa equazione assume la forma dell'equazione dell'oscillatore armonico:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\theta, \tag{5}$$

dove la frequenza angolare ω soddisfa la relazione

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell}. \tag{6}$$

Otteniamo così due importanti conseguenze:

1. La frequenza delle piccole oscillazioni del pendolo è indipendente dalla loro ampiezza (almeno fin tanto che esse rimangono piccole). Questa proprietà, detta **isocronia**, fu la prima importante scoperta di Galileo.
2. Questa frequenza è indipendente dalla massa del corpo considerato, ma dipende solo dalla lunghezza del pendolo e dall'accelerazione di gravità. Quindi un pendolo può essere utilizzato per avere una misura accurata dell'accelerazione di gravità (**pendolo gravimetrico**).

Durante il XVII secolo ci furono delle proposte di utilizzare il pendolo che batte i secondi (cioè che ha un periodo di due secondi) come campione di lunghezza, utilizzando questa relazione. Prendendo il valore standard dell'accelerazione di gravità $g = 9.803$ ms^{-2},e ponendo $\omega = \pi$ s^{-1}, otteniamo $\ell = 0.993$ m: alcuni storici pensano che la definizione poi adottata del metro (un quarantamilionesimo della lunghezza del meridiano) sia stata scelta per la sua prossimità con questo valore. Tuttavia ci si rese presto conto che questa scelta non era pratica, dato che l'accelerazione di gravità dipende tanto dalla latitudine quanto dalla distribuzione delle masse nella Terra nell'intorno del punto che si considera.

Notiamo che, nell'approssimazione che abbiamo usato, si può ottenere un'equazione del moto equivalente proettando direttamente le forze lungo l'asse orizzontale x e verticale z (cf. fig. 3). Poniamo l'origine degli assi in O$'$, il punto più basso della traiettoria, con l'asse x diretto verso destra. Allora si ha $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{k}$, dove $\boldsymbol{k}$ è il versore dell'asse z, e $\boldsymbol{N} = -N\sin\theta\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{k}$, dove $\boldsymbol{i}$ è il versore dell'asse x. D'altra parte si ha $\theta \simeq x/\ell$, $\cos\theta \simeq 1 - x^2/2\ell \simeq 1$, e $z \propto x^2$ è trascurabile. Otteniamo così le equazioni

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -N\frac{x}{\ell}; \qquad m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = -mg + N. \tag{7}$$

Nella seconda equazione possiamo porre il primo membro a zero, ottenendo $N \simeq mg$. Sostituendo nella prima equazione, e dividendo ambo i membri per m, otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{\ell}x. \tag{8}$$

Questa è di nuovo l'equazione dell'oscillatore armonico, con frequenza angolare data dalla (6).

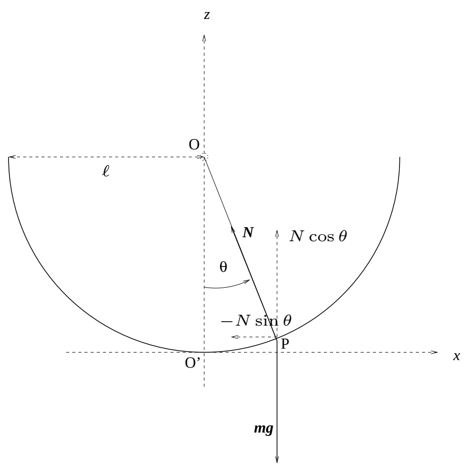

Figura 3. Decomposizione delle forze agenti sul pendolo lungo gli assi coordinati.