Oscillatore armonico

L. P.

19 Agosto 2007

1. Definizione

L'**oscillatore armonico** è uno dei sistemi meccanici più importanti in Fisica. Esso è l'idealizzazione di un sistema costituito da un corpo di massa m, collegato a una molla. La fenomenologia del comportamento di una molla fu definita da diversi scienziati verso la metà del Seicento, in particolare da Robert Hooke, per cui la legge fondamentale dell'elasticità va sotto il nome di **legge di Hooke**. Consideriamo una molla a riposo, posta in un piano orizzontale senza attrito, e con un estremo fissato al tavolo. Se nessuna altra forza agisce su di essa, il suo estremo libero si troverà in una certa posizione, che potremo prendere come origine degli assi. Poniamo l'asse x nella direzione della molla, con il verso positivo che va dall'estremo fisso verso quello libero, e decidiamo (fino a nuovo ordine) di sollecitare la molla solo lungo la direzione x.

Applichiamo adesso all'estremo libero una forza f^{ext}, che può essere positiva (nelle nostre convenzioni) se tende ad allungare la molla, o negativa se tende a comprimerla. In questa situazione la molla raggiunge l'equilibrio quando la forza elastica f che essa esercita sul suo estremo libero è l'opposta della forza f^{ext} applicata. L'esperimento mostra che l'equilibrio viene raggiunto quando la posizione dell'estremo libero corrisponde a una deformazione della molla *proporzionale alla forza applicata.* Indichiamo con x la posizione dell'estremo libero all'equilibrio. Si ha allora

$$kx = f^{\text{ext}},$$

dove k è una costante (detta **costante di Hooke**). Questa relazione può essere interpretata dicendo che la molla che subisce una deformazione x esercita sul suo estremo libero una forza f proporzionale ed opposta in direzione alla deformazione subìta:

$$f = -kx. \tag{1}$$

La costante di Hooke si misura in unità Nm^{-1} (dimensioni $[\mathrm{mt}^{-2}]$) nel sistema MKS.

È chiaro che questo comportamento può essere utilizzato anche in "senso inverso": esso permette cioè di misurare l'intensità della forza applicata f^{ext} mediante l'osservazione della deformazione x. Su questa base sono stati costruiti i *dinamometri*, cioè gli strumenti di misura della forza (le bilance sono un caso particolare di dinamometri).

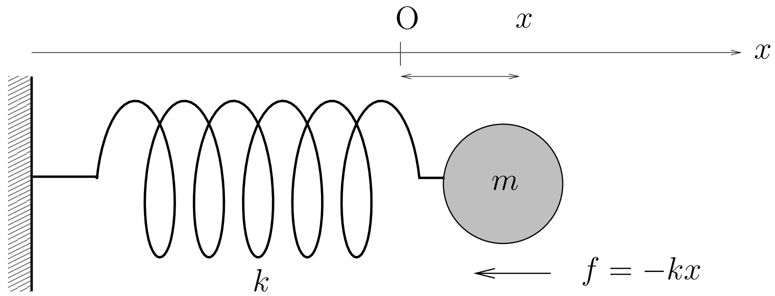

Figura 1. Oscillatore armonico. Il punto d'equilibrio della molla corrisponde all'ascissa O. Se la molla è estesa (o contratta) fino al punto di ascissa x, la molla esercita sulla massa una forza $f = -kx$.

L'**oscillatore armonico** è il sistema fisico che si ottiene collegando a una molla ideale (che segue esattamente la legge di Hooke ed è di massa trascurabile) un punto materiale di massa m. In questa nota discuteremo il comportamento dinamico dell'oscillatore armonico.

2. Equazione del moto e sua soluzione

Consideriamo un oscillatore armonico in cui il punto materiale (la "massa") si muove lungo l'asse x. Come abbiamo detto prima, mettiamo l'origine nel punto di equilibrio della molla. Supponiamo che, a un determinato istante t, la massa si trovi nel punto di coordinata $x(t)$. Vogliamo conoscere l'equazione del moto soddisfatta da $x(t)$.

All'istante t, la forza che si esercita sulla massa è data da

$$f = -kx(t). \tag{2}$$

Applichiamo adesso alla massa la legge di Newton: otteniamo

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t), \tag{3}$$

dove $\ddot{x} = \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$ è l'accelerazione istantanea della massa (poiché tutto il moto si svolge lungo l'asse x, solo la componente x deve essere presa in considerazione). Questa equazione può anche essere scritta introducendo la quantità

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \tag{4}$$

detta **frequenza angolare** o **pulsazione** dell'oscillatore armonico (molto spesso, se non c'è pericolo di confusione, verrà chiamata semplicemente *frequenza*). Si ha

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t). \tag{5}$$

Poiché le dimensioni di k sono $[\mathrm{mt}^{-2}]$, le dimensioni di ω_0 sono $[\mathrm{t}^{-1}]$, quindi essa viene misurata in unità s^{-1}.

La (5) è l'equazione del moto che cercavamo. Vogliamo adesso determinarne la soluzione generale, ed esprimerla in funzione delle condizioni iniziali (posizione e velocità a un dato istante) della massa.

Notiamo che la (5) è un'equazione lineare: supponiamo che $\xi_1(t)$ e $\xi_2(t)$ siano due soluzioni dell'equazione. Allora è facile vedere che, data una qualunque coppia (a, b) di numeri reali, anche la combinazione lineare

$$a\xi_1(t) + b\xi_2(t)$$

ne è una soluzione. D'altra parte, essa è un'equazione differenziale ordinaria *del secondo ordine*, che riguarda cioè la funzione incognita e le sue derivate fino al secondo ordine. Quindi la soluzione generale dipenderà da due costanti arbitrarie.

Quindi saremo in possesso della soluzione generale se potremo trovare due soluzioni $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ della (5) *linearmente indipendenti*, tali cioè che non sia possibile trovare una coppia (α_1, α_2) di numeri reali (non entrambi nulli) in modo che la relazione

$$\alpha_1\xi_1(t) + \alpha_2\xi_2(t) = 0, \tag{6}$$

sia identicamente soddisfatta ad ogni istante t.

Consideriamo adesso la coppia di funzioni

$$(\xi_1(t), \xi_2(t)) = (\cos\omega_0 t, \sin\omega_0 t). \tag{7}$$

Poiché si ha

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\cos\omega_0 t = -\omega_0^2\cos\omega_0 t, \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\sin\omega_0 t = -\omega_0^2\sin\omega_0 t, \tag{8}$$

vediamo che tanto $\xi_1(t)$ che $\xi_2(t)$ sono soluzioni della (5). Quindi $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ costituiscono una coppia di soluzioni dell'equazione considerata. Mostriamo adesso che esse sono linearmente indipendenti.

Supponiamo che le funzioni $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ non siano linearmente indipendenti, e che quindi esista una coppia (α_1, α_2) di numeri reali (non entrambi nulli) tali che $\alpha_1\xi_1(t) + \alpha_2\xi_2(t) = 0$, $\forall t$. In particolare, se così fosse, $\xi_1(t)$ e $\xi_2(t)$ dovrebbero annullarsi contemporaneamente. D'altra parte le nostre soluzioni soddisfano la relazione

$$\cos^2\omega_0 t + \sin^2\omega_0 t = 1, \qquad \forall t, \tag{9}$$

per cui se, p.es., $\cos\omega_0 t = 0$, si ha $\sin\omega_0 t = \pm 1$.

Possiamo quindi concludere che la soluzione generale dell'equazione differenziale (5) ha la forma

$$x(t) = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t. \tag{10}$$

Questa legge oraria del moto, che descrive il comportamento dell'oscillatore armonico, definisce il **moto armonico**.

Vogliamo adesso valutare la soluzione che corrisponde a delle condizioni iniziali specifiche. Supponiamo che, all'istante $t = 0$, si abbia $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$. Calcoliamo $x(0)$ e la sua derivata prima in $t = 0$:

$$x(0) = a\cos 0 + b\sin = a; \tag{11}$$

$$\dot{x}(0) = -a\omega_0\sin 0 + b\omega_0\cos 0 = b\omega_0. \tag{12}$$

Otteniamo così

$$a = x_0; \tag{13}$$
$$b = \omega_0^{-1} v_0. \tag{14}$$

Questo permette di valutare la legge del moto del sistema nel caso generale. In particolare, se la massa è inizialmente in quiete nel punto di coordinate X_0, si ha

$$x(t) = X_0 \cos \omega_0 t; \tag{15}$$

invece, se la massa si trova inizialmente nell'origine, animata della velocità V_0, si ha

$$x(t) = \frac{V_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \tag{16}$$

Notiamo che la soluzione generale può essere anche espressa nella forma

$$x(t) = A \cos (\omega_0 t + \phi) , \tag{17}$$

dove $A \geq 0$ e ϕ sono due costanti. In effetti, definiamo A mediante la relazione

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \tag{18}$$

dove s'intende di scegliere la determinazione non negativa della radice. Consideriamo le quantità $c = a/A$ e $s = -b/A$. Si ha allora $0 \leq c \leq 1$, $0 \leq s \leq 1$, e $c^2 + s^2 = 1$. Quindi c e s possono essere considerati rispettivamente come coseno e seno di un qualche angolo. Possiamo così trovare un angolo ϕ tale che

$$a = A \cos \phi; \qquad b = -A \sin \phi. \tag{19}$$

(Notiamo che questo angolo è definito a meno di multipli di 2π.) Sostituendo queste espressioni nella (17) otteniamo

$$x(t) = A (\cos \omega_0 t \cos \phi - \sin \omega_0 t \sin \phi) = A \cos (\omega_0 t + \phi) , \tag{20}$$

dove abbiamo sfruttato la formula d'addizione per i coseni. Il coefficiente A è chiamato l'**ampiezza** del moto armonico, e la quantità ϕ è chiamata la **costante di fase**. In questo contesto, l'argomento $(\omega_0 t + \phi)$ del coseno è chiamato la **fase** (istantanea) del moto.

Date le condizioni iniziali (x_0, v_0), otteniamo le seguenti espressioni per i parametri (A, ϕ):

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}; \qquad \phi = \tan^{-1} \left(-\frac{v_0}{\omega_0 x_0} \right). \tag{21}$$

Nella seconda equazione, si sceglierà $0 \leq \phi \leq \pi$ se $v_0 \leq 0$, e $\pi \leq \phi \leq 2\pi$ (o, equivalentemente $0 \geq \phi \geq -\pi$) se $v_0 \geq 0$.

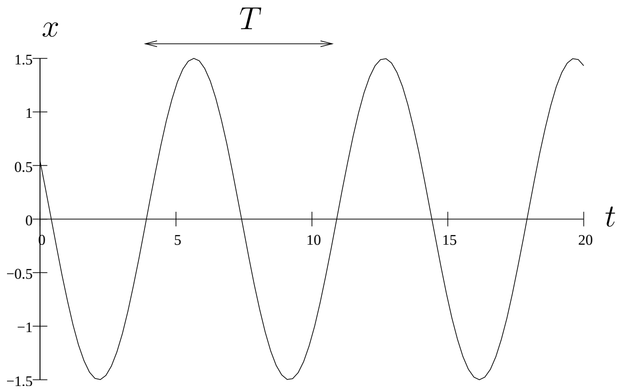

Figura 2. Legge oraria del moto (17), con $\omega_0 = \pi/3.5$, $A = 1.5$, e $\phi = 1.2$. Si noti la periodicità, con periodo $T = 2\pi/\omega_0 = 7.0$.

3. Cinematica del moto armonico

In questo paragrafo, discuteremo le proprietà della legge del moto (17). La funzione coseno è una funzione periodica: per ogni valore di ϕ si ha infatti

$$\cos(\phi + 2\pi) = \cos\phi. \tag{22}$$

Quindi anche $x(t)$, definito dalla (17) è una funzione periodica. Si ha, per qualunque valore di t,

$$x(t + T) = x(t), \tag{23}$$

dove T è definito da

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \tag{24}$$

Questa periodicità è evidente in figura 2. In altri termini, la massa compie un movimento di andirivieni (un'**oscillazione**) di durata uguale a T. Possiamo anche dire che, in un intervallo di tempo di durata Δt, la massa compie un numero $\mathcal{N}$ di oscillazioni pari a

$$\mathcal{N} = \frac{\Delta t}{T}. \tag{25}$$

Il numero di oscillazioni $\nu = \mathcal{N}/\Delta t$ per unità di tempo è chiamato **frequenza**. Esso è evidentemente uguale all'inverso di T:

$$\nu = \frac{1}{T}. \tag{26}$$

La frequenza si misura in unità di cicli al secondo. Questa unità si chiama **hertz** e si indica con il simbolo Hz. Bisogna fare attenzione a distinguere questa unità da quella relativa alla frequenza angolare: quando si vuole specificare, si dice che la frequenza angolare si misura in *radianti* al secondo, mentre l'hertz corrisponde a *cicli* al secondo.‡

Vediamo adesso più da vicino quello che accade in un'oscillazione. Scegliamo

‡ Ricordo le regole per la corretta ortografia delle unità di misura. Il nome dell'unità di misura, anche se è derivato da un nome proprio, è *minuscolo*. Inoltre esso viene scritto senza accenti o altri segni

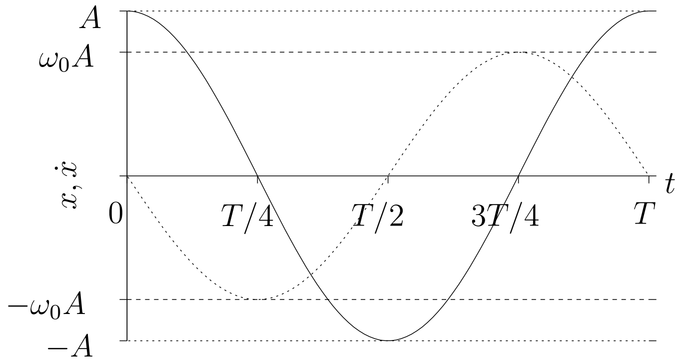

Figura 3. Moto dell'oscillatore armonico durante un periodo. Linea continua: $x(t)$. Linea punteggiata: $\dot{x}(t)$. Le linee orizzontali corrispondono rispettivamente a $x = \pm A$ (esterne) e $\dot{x} = \pm\omega_0 A$ (interne).

l'origine dei tempi in modo da porre $\phi = 0$. Nella figura 3 è riportato il grafico di $x(t)$ e di $\dot{x}(t)$ lungo un periodo. È da notare che i tempi sono misurati in unità del periodo, gli spostamenti in unità di A, e le velocità in unità $\omega_0 A$. In questo modo le condizioni iniziali del moto sono $x_0 = A$, $v_0 = 0$. In queste condizioni, la molla esercita sulla massa una forza $f = -kx_0$, che tende a richiamare la massa verso l'origine. La velocità $\dot{x}(t)$, per $t > 0$ e abbastanza piccolo, è *negativa* e cresce in modulo, finché $x(t)$ non raggiunge l'origine. A questo istante (che corrisponde a $t = T/4$) la velocità $\dot{x}$ è massima in modulo, e la curva $x(t)$ presenta un flesso. Per $T/4 < t < T/2$ la posizione $x(t)$ del corpo è negativa, e la molla esercita una forza positiva. La velocità $\dot{x}(t)$ tende quindi a *diminuire* in valore assoluto, perché la forza agisce in direzione opposta alla velocità. All'istante $t = T/2$, la massa raggiunge la massima elongazione negativa, e si ha $x(T/2) = -A$. In questo istante, la velocità si annulla. A questo punto, la massa ricomincia a muoversi con velocità sempre crescente verso l'origine, che raggiunge per $t = 3T/4$. Quindi, per $3T/4 < t < T$, essa si muove, con velocità via via decrescente, allontanandosi dall'origine. Per $t = T$ la massa si trova nel punto di ascissa $x = A$ con velocità nulla, cioè nella stessa situazione in cui si trovava per $t = 0$, e il ciclo ricomincia.

4. Energia cinetica e potenziale del moto armonico

La forza elastica di un oscillatore armonico unidimensionale è funzione della sola coordinata x. Essa è quindi una forza *conservativa.* In effetti è possibile definire l'energia potenziale $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$, tale che

$$f(x) = -kx = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}. \tag{27}$$

diacritici: "ampere" e non "Ampère", "hertz" e non "Hertz". D'altra parte l'abbreviazione delle unità che traggono il loro nome dal nome di uno scienziato comincia con la maiuscola. Si ha così "Hz" come abbreviazione di hertz, "A" come abbreviazione di ampere, "N" come abbreviazione di newton, ecc., mentre "m" è l'abbreviazione di metro, "s" quella di secondo, e così via.

L'energia cinetica§ dell'oscillatore armonico unidimensionale è espressa, come al solito, da

$$K = \frac{1}{2} m\dot{x}^2. \tag{28}$$

Poiché la massa è soggetta soltanto a forze conservative, l'energia totale $E = T + U$ è costante nel tempo. In effetti, se $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$, si ha $\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 + \phi)$, per cui

$$\begin{aligned} E = K + U &= \frac{1}{2} m\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} k x^2(t) \\ &= \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 + \phi) + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega_0 + \phi) \\ &= \frac{1}{2} k A^2. \end{aligned} \tag{29}$$

Per ottenere questo risultato, abbiamo sfruttato la definizione di $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, e la relazione $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, valida per qualunque valore dell'angolo α. In figura 4

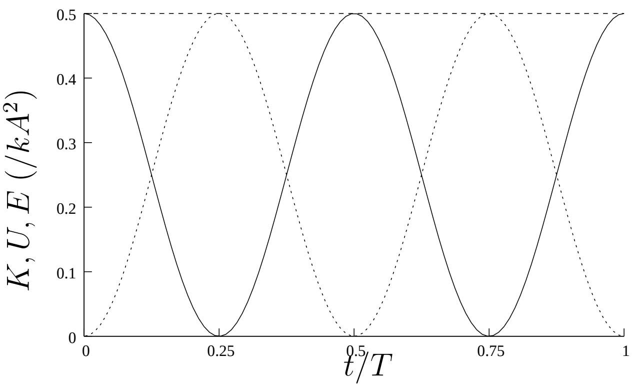

Figura 4. Energia potenziale (linea continua) e cinetica (linea punteggiata) dell'oscillatore armonico durante un periodo. I tempi sono misurati in unità del periodo T. L'energia è misurata in unità kA^2. Notare lo scambio fra energia potenziale e cinetica, che avviene due volte durante il periodo, mantenendosene però sempre costante la somma (linea tratteggiata).

mostriamo l'andamento dell'energia potenziale U (linea continua), dell'energia cinetica K (linea punteggiata) e dell'energia totale $E = K + U$ (linea tratteggiata) nel corso di un ciclo. Vediamo che inizialmente (quando la massa si trova alla massima distanza dall'origine) l'energia è tutta potenziale. Successivamente l'energia cinetica aumenta, finche l'energia è tutta cinetica quando la massa passa per l'origine. Nel secondo quarto di ciclo l'energia cinetica diminuisce e cresce l'energia potenziale, fino ad annullarsi a metà periodo, quando la massa si trova di nuovo alla massima distanza dall'origine (ma dalla parte opposta). A questo punto l'energia cinetica riprende ad aumentare, e l'energia meccanica a diminuire, fino a diventare massima per $t = 3T/4$, quando la

§ In questo paragrafo indichiamo l'energia cinetica con K piuttosto che con T, per non confonderla con il periodo T dell'oscillatore armonico.

massa passa per l'origine e l'energia potenziale si annulla. Finalmente l'energia cinetica diminuisce e l'energia potenziale aumenta, finché, per $t = T$ la prima si annulla e la seconda diventa massima. In ogni istante la somma $T + U$ dell'energia cinetica e potenziale è costante. Notiamo anche che l'energia cinetica media, valutata lungo un periodo, che è definita da

$$\overline{K} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{d}t \; K(t), \tag{30}$$

è pari all'energia potenziale media

$$\overline{U} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{d}t \; U(t). \tag{31}$$

È facile ottenere questo risultato, sfruttando la relazione

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \cos^2 \phi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \; \sin^2 \phi = \pi. \tag{32}$$

5. Numeri complessi

Per poter sviluppare con più facilità gli argomenti successivi, è utile introdurre la rappresentazione dell'oscillatore tramite i numeri complessi. I numeri complessi sono numeri della forma

$$z = a + \mathrm{i}b, \tag{33}$$

dove a e b sono numeri reali, e i è l'**unità immaginaria**, che soddisfa

$$\mathrm{i}^2 = -1. \tag{34}$$

La somma e il prodotto di numeri complessi sono valutati con le ordinarie regole dell'algebra, tenendo presente la (34). Si ha così, per esempio,

$$(a + \mathrm{i}b)\,(c + \mathrm{i}d) = (ac - bd) + \mathrm{i}\,(ad + bc)\,. \tag{35}$$

Dato il numero complesso $z = a + \mathrm{i}b$, il numero reale a è chiamato la sua **parte reale**, e il numero reale b la sua **parte immaginaria**. Si pone

$$\mathsf{Re}\, z = a; \qquad \mathsf{Im}\, z = b. \tag{36}$$

In questo paragrafo, adottiamo la convenzione che le prime lettere dell'alfabeto $(a, b, c, \ldots)$ corrispondono a numeri reali, mentre le ultime lettere (x, y, z) corrispondono a numeri complessi.

Dato il numero complesso $z = a + \mathrm{i}b$, il numero **complesso coniugato** di z si indica con z^* (oppure $\overline{z}$), e viene definito da

$$z^* = a - \mathrm{i}b. \tag{37}$$

Il **modulo** $|z|$ del numero complesso z è un numero reale non negativo che soddisfa

$$|z|^2 = zz^* = a^2 + b^2. \tag{38}$$

È facile vedere che $|z| = 0$ se, e soltanto se, $z = 0$ (cioè se si annullano tanto la parte reale che la parte immaginaria di z). Inoltre, dati due numeri complessi z_1 e z_2, si ha

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|. \tag{39}$$

Dato il numero complesso $z = a + \mathrm{i}b$, si definisce **argomento** di z un numero reale ϕ che soddisfa le relazioni

$$\cos\phi = \frac{a}{|z|}; \qquad \sin\phi = \frac{b}{|z|}. \tag{40}$$

Si ha evidentemente

$$\tan\phi = \frac{b}{a}. \tag{41}$$

L'argomento ϕ è definito a meno di multipli di 2π. È possibile trovare una determinazione dell'argomento ϕ tale che $0 \leq \phi \leq \pi$, se $b \geq 0$, e $0 \geq \phi \geq -\pi$, se $b \geq 0$. L'argomento di $z = 0$ non è definito.

Il modulo e l'argomento di z hanno una semplice interpretazione geometrica. Rappresentiamo il numero complesso $z = a + \mathrm{i}b$ come il punto P di coordinate (a, b) nel piano (in questo casi, si parla di **piano di Argand-Gauss**). L'origine O corrisponde al numero $z = 0$. Allora $|z|$ corrisponde al modulo del vettore OP, e ϕ è l'angolo (misurato in radianti) che il vettore OP forma con l'asse delle x. Per convenzione, si prendono come positivi gli angoli dall'asse delle x in verso antiorario. Il modulo e l'argomento

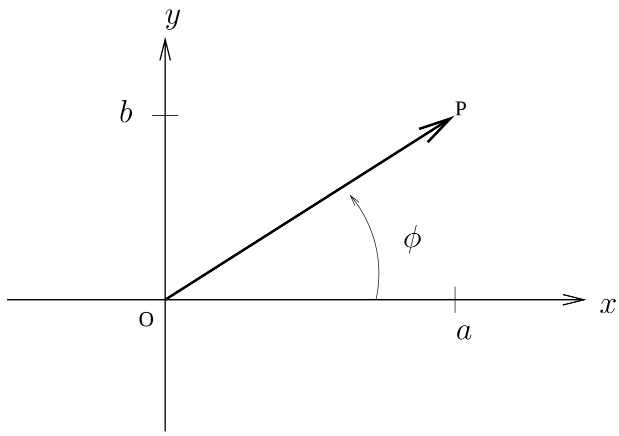

Figura 5. Rappresentazione del numero complesso $z = a + \mathrm{i}b$ nel piano di Argand-Gauss. Il punto P ha le coordinate (a, b). Il modulo $|z|$ di z è uguale al modulo del vettore OP. L'argomento ϕ di z è definito dall'angolo che OP forma con l'asse delle x.

di z identificano univocamente z. Se $z = a + \mathrm{i}b$, $\rho = |z|$ e ϕ è l'argomento di z, si ha evidentemente

$$a = \rho\cos\phi; \qquad b = \rho\sin\phi. \tag{42}$$

Questa relazione può essere espressa in forma più compatta utilizzando la **formula di Eulero**, che esprime l'esponenziale di un numero immaginario (cioè della forma ia) in termini delle funzioni trigonometriche:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi. \tag{43}$$

Posto allora $\rho = |z|$, e supponendo che ϕ sia l'argomento di z, si ha la relazione

$$z = \rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}. \tag{44}$$

Ricordiamo la formula d'addizione per l'esponenziale:

$$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{y}. \tag{45}$$

Si ha in particolare, per la formula di Eulero, per ϕ e ψ reali,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi+\psi)} &= \cos(\phi+\psi) + \mathrm{i}\sin(\phi+\psi) \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} = (\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)\,(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)\,, \end{aligned} \tag{46}$$

come si può verificare direttamente tramite le formule d'addizione.

Queste relazioni permettono di valutare facilmente il prodotto di numeri complessi espressi in funzione di modulo ed argomento:

> *Il modulo del prodotto di due numeri complessi è uguale al prodotto dei rispettivi moduli; l'argomento del prodotto è pari alla somma degli argomenti.*

L'**inverso** di un numero complesso z è il numero complesso (denotato con z^{-1}) che soddisfa l'equazione

$$zz^{-1} = 1. \tag{47}$$

L'inverso di z esiste ed è unico per ciascun numero complesso diverso da 0. Dalla regola appena ottenuta, è facile vedere che il modulo di z^{-1} è pari all'inverso del modulo di z, mentre l'argomento di z^{-1} è pari all'opposto dell'argomento di z. Si ha quindi

$$z = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \Longrightarrow z^{-1} = \frac{1}{A}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}. \tag{48}$$

Alternativamente,

$$z = a + \mathrm{i}b \Longrightarrow z^{-1} = \frac{a - \mathrm{i}b}{a^2 + b^2}. \tag{49}$$

6. Soluzioni complesse per l'oscillatore armonico

Dalla formula d'addizione per l'esponenziale segue direttamente la regola di derivazione

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\lambda t} = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}, \tag{50}$$

valida per λ reale o complesso.

Possiamo adesso cercare di risolvere l'equazione differenziale dell'oscillatore armonico

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0, \tag{51}$$

sotto forma di esponenziale:

$$x = \mathrm{e}^{\lambda t}. \tag{52}$$

L'equazione assume la forma

$$\left(\lambda^2 + \omega_0^2\right)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0. \tag{53}$$

Perché questa relazione sia identicamente soddisfatta, si deve avere

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0. \tag{54}$$

Questa equazione ammette soluzione nei numeri complessi, e precisamente

$$\lambda = \pm \mathrm{i}\omega_0. \tag{55}$$

Abbiamo quindi ottenuto due soluzioni dell'equazione (51):

$$x_+(t) = \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega_0 t}; \qquad x_-(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}. \tag{56}$$

La soluzione generale della (51) sarà una combinazione lineare di queste due soluzioni, della forma

$$x(t) = \alpha_+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} + \alpha_- \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}, \tag{57}$$

con $\alpha_\pm$ costanti arbitrarie complesse. Tuttavia, in generale, questa soluzione non sarà reale. Perché $x(t)$ sia reale, α_+ e α_- debbono soddisfare una relazione. Valutiamo infatti il complesso coniugato $\overline{x}(t)$ di $x(t)$. Poiché $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}$, si ha

$$\overline{x}(t) = \alpha_+^* \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} + \alpha_-^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}. \tag{58}$$

Se $x(t)$ è reale, si ha $\overline{x}(t) = x(t)$. Questo avviene se e solo se

$$\alpha_+^* = \alpha_-, \tag{59}$$

che implica anche $\alpha_-^* = \alpha_+$. Posto quindi $\alpha_+ = (a - \mathrm{i}b)/2$, e quindi $\alpha_- = (a + \mathrm{i}b)/2$, otteniamo

$$x(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t. \tag{60}$$

Questa è la soluzione generale reale dell'equazione differenziale dell'oscillatore armonico. Alternativamente, possiamo scegliere come soluzione la parte reale di $\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$. Posto $\alpha = a - \mathrm{i}b$, otteniamo

$$x(t) = \mathsf{Re}\left[(a - \mathrm{i}b)\left(\cos \omega_0 t + \mathrm{i} \sin \omega_0 t\right)\right] = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t.$$

I due metodi sono equivalenti, ma la relazione fra α e (a, b) differisce di un fattore 2.

Introducendola notazione polare per α,

$$\alpha = A \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}, \tag{61}$$

otteniamo

$$x(t) = \mathsf{Re}\left[A \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \phi)}\right] = A \cos\left(\omega t + \phi\right). \tag{62}$$

7. Oscillatore smorzato

Supponiamo adesso che la massa dell'oscillatore sia sottoposta ad **attrito viscoso**. Questa è una forza non conservativa, proporzionale alla velocità, ma diretta in direzione opposta:

$$f^{\text{res}} = -\zeta\dot{x}, \qquad \zeta > 0. \tag{63}$$

L'equazione di Newton per la massa assume quindi la forma

$$m\ddot{x} = -kx - \zeta\dot{x}. \tag{64}$$

Introducendo le quantità $\omega_0^2 = k/m$, $\lambda = \zeta/m$, possiamo riscrivere questa equazione nella forma

$$\ddot{x} + \lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{65}$$

Il sistema che stiamo considerando è chiamato **oscillatore smorzato** e la (65) ne costituisce l'equazione differenziale. Utilizzando la proprietà dell'esponenziale, secondo cui

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{zt} = z\mathrm{e}^{zt},$$

cerchiamo una soluzione di questa equazione differenziale nella forma

$$x(t) = \mathrm{e}^{zt}. \tag{66}$$

La (65) assume la forma

$$\left(z^2 + \lambda z + \omega_0^2\right)\mathrm{e}^{zt} = 0. \tag{67}$$

Perché questa equazione sia identicamente soddisfatta, si deve avere

$$z^2 + \lambda z + \omega_0^2 = 0. \tag{68}$$

Questa equazione di secondo grado ha in generale due soluzioni nel campo complesso, date da

$$z_\pm = -\frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \omega_0^2}. \tag{69}$$

Oscillatore sottosmorzato

Per $\lambda < 2\omega_0$, l'argomento della radice quadrata è negativo, e quindi la radice quadrate stessa è immaginaria. Le due soluzioni per z sono dunque della forma

$$z_\pm = -\gamma \pm \mathrm{i}\omega, \tag{70}$$

dove

$$\gamma = \frac{\lambda}{2}; \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{4}}. \tag{71}$$

Notiamo che si ha $\omega \leq \omega_0$, e che $\omega = \omega_0$ solo se $\lambda = 0$. In questo regime, si dice che l'oscillatore è **sottosmorzato**.

Utilizzando le espressioni derivate nel paragrafo precedente, possiamo scrivere la soluzione generale reale della (65) nella forma

$$x(t) = \mathsf{Re}\left[\alpha e^{zt}\right], \tag{72}$$

dove z può essere tanto z_+ che z_-, e α è una costante complessa arbitraria. Scegliamo $z = z_+$ e $\alpha = a - \mathrm{i}b$. Si ha allora

$$x(t) = \mathsf{Re}[(a - \mathrm{i}b)e^{-\gamma t + \mathrm{i}\omega t}] = (a\cos\omega t + b\sin\omega t)\, e^{-\gamma t}. \tag{73}$$

È possibile rappresentare questa legge del moto nella forma equivalente

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)\, e^{-\gamma t} \tag{74}$$

dove, come al solito, si ha

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}; \qquad \tan\phi = -\frac{b}{a}. \tag{75}$$

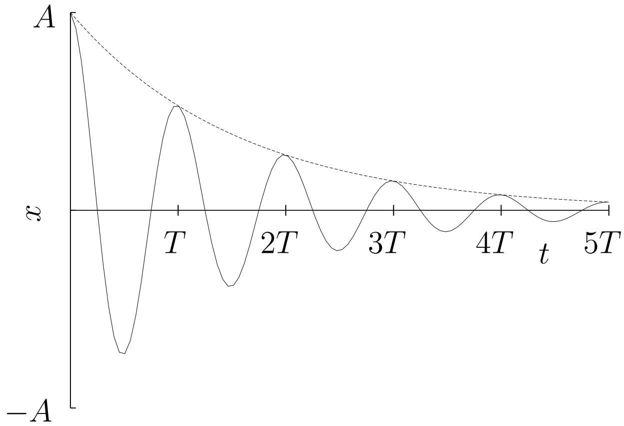

Figura 6. Moto di un oscillatore sottosmorzato. Viene riportata la soluzione $x(t) = A\cos\omega t\, e^{-\gamma t}$, con $\gamma = \omega$. La linea punteggiata corrisponde a $x(t) = Ae^{-\gamma t}$.

In queste condizioni, l'oscillatore compie una serie di **oscillazioni smorzate** con ampiezza esponenzialmente decrescente (vedi figura 6). La costante γ che appare in questa espressione, e che determina la velocità con cui decrescono le oscillazioni, è chiamata **costante di smorzamento**. Il suo inverso (di solito denotato con τ) è chiamato la **costante di tempo**.

Oscillatore sovrasmorzato

Per $\lambda > 2\omega_0$, l'argomento della radice quadrata in (69) è positivo, e quindi le soluzioni $z_\pm$ sono entrambe reali e negative:

$$z_\pm = -\gamma_\pm = -\frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \omega_0^2}. \tag{76}$$

In questo caso, l'oscillatore viene detto **sovrasmorzato**, e la soluzione generale è data dalla combinazione lineare di due esponenziali decrescenti:

$$x(t) = ae^{-\gamma_+ t} + be^{-\gamma_- t}. \tag{77}$$

In questa situazione, $x(t)$ o $\dot{x}(t)$ si possono annullare al massimo una volta: entrambi, poi, tendono verso 0 per $t \to \infty$.

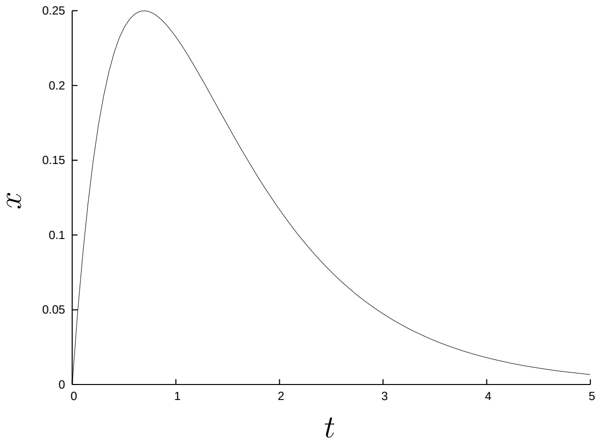

Figura 7. Moto di un oscillatore sovrasmorzato. Viene mostrata la soluzione $x(t) = a\mathrm{e}^{-\gamma_- t} + b\mathrm{e}^{-\gamma_+ t}$, con $a = 1.0$, $b = -1.0$, $\gamma_- = 1.0$ e $\gamma_+ = 2.0$.

Oscillatore critico

Se $\lambda = 2\omega_0$, l'argomento della radice quadrata in (69) si annulla, e le due soluzioni $z_\pm$ coincidono. In questo caso le due soluzioni linearmente indipendenti della (65) sono date da

$$x_0(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}; \qquad x_1(t) = t\mathrm{e}^{-\gamma t}, \tag{78}$$

con $\gamma = \lambda/2 = \omega_0$. Possiamo ottenere questo risultato nelle maniere seguenti.

Prima maniera: Supponiamo che $\lambda < 2\omega_0$, e scriviamo le due soluzioni linearmente indipendenti della (65) nella forma

$$x_+(t) = \cos\omega t\,\mathrm{e}^{-\gamma t}; \qquad x_-(t) = \sin\omega t\,\mathrm{e}^{-\gamma t},$$

con $\gamma = \lambda/2$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2/4}$. Quando $\lambda \to 2\omega_0$, si ha $\omega \to 0$. La prima soluzione tende verso $x_0(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}$, ma la seconda tende a 0. Tuttavia, poiché l'equazione (65) è lineare, possiamo moltiplicare o dividere la soluzione $x_-(t)$ per un numero arbitrario, ottenendo ancora una soluzione dell'equazione di partenza. Dividiamo quindi $x_-(t)$ per ω, e passiamo al limite. Poiché

$$\lim_{\omega\to 0} \frac{\sin\omega t}{\omega} = t,$$

otteniamo la soluzione

$$x_1(t) = \lim_{\omega\to 0} \frac{x_-(t)}{\omega} = t\mathrm{e}^{-\gamma t}.$$

Seconda maniera: Quando $\lambda = 2\omega_0$, possiamo scrivere l'equazione differenziale (65) nella forma

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \gamma\right)^2 x = 0. \tag{79}$$

Questa equazione ammette naturalmente la soluzione

$$x_0(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}.$$

Cerchiamone una soluzione nella forma

$$x(t) = \phi(t)\mathrm{e}^{-\gamma t},$$

dove $\phi(t)$ è una funzione da determinarsi.

Valutando (79) su questa funzione, otteniamo

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \gamma\right)^2 x(t) = \phi''(t)\mathrm{e}^{-\gamma t}.$$

Perché la $x(t) = \phi(t)\mathrm{e}^{-\gamma t}$ sia una soluzione, si deve avere dunque

$$\phi''(t) = 0.$$

Questa equazione ammette la soluzione generale

$$\phi(t) = a + bt.$$

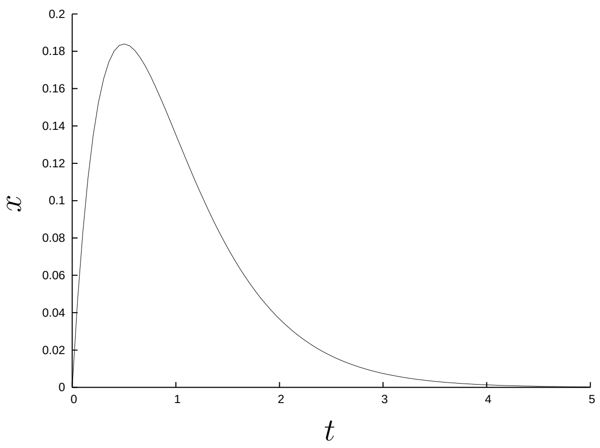

Figura 8. Moto di un oscillatore critico. Viene mostrata la soluzione $x(t) = at\mathrm{e}^{-\gamma t}$, con $a = 1.0$, $\gamma = 2.0$.

L'andamento generale del comportamento di un oscillatore critico è simile a quello di un oscillatore sovrasmorzato. Notiamo tuttavia che, se ω_0 è fissato, il valore di λ per cui l'oscillatore raggiunge più rapidamente lo stato d'equilibrio è proprio il valore critico. In effetti, la scala dei tempi con cui l'oscillatore si avvicina a 0 è determinata da $\tau = \gamma^{-1}$, dove γ è il minore fra γ_+ e γ_-. In figura 9 mostriamo l'andamento della **costante di smorzamento** γ in funzione di λ per ω_0 fissato. Si nota che il valore massimo di γ si ha proprio in corrispondenza del valore critico di λ, cioè per $\lambda = 2\omega_0$.

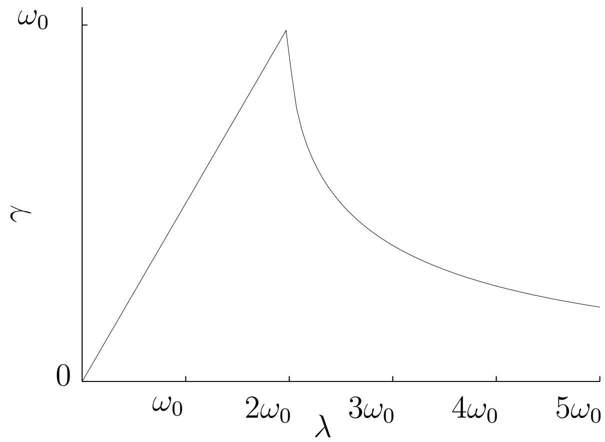

Figura 9. Costante di smorzamento γ di un oscillatore smorzato in funzione di λ. Si noti che il valore massimo di γ si ha per $\lambda = 2\omega_0$, cioè per lo smorzamento critico.

8. Oscillatore forzato periodicamente

Un oscillatore smorzato, lasciato a sé stesso, va all'equilibrio, in quiete, dopo un tempo proporzionale a $\tau = \gamma^{-1}$. Se però supponiamo di applicare ad esso una forza periodica, dopo un tempo dello stesso ordine di grandezza, esso assumerà un moto periodico, con *frequenza uguale alla frequenza della forza applicata.* Consideriamo quindi un oscillatore smorzato, sottoposto a una forza esterna periodica, della forma

$$F^{\mathrm{ext}}(t) = m f_0 \cos \Omega t. \tag{80}$$

L'equazione soddisfatta dall'oscillatore assume la forma

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t. \tag{81}$$

Consideriamo questa espressione come la parte reale di un'espressione complessa. La forza applicata ha la forma

$$F^{\mathrm{ext}}(t) = m f_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}, \tag{82}$$

e la soluzione che cerchiamo avrà per espressione

$$x(t) = \alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}. \tag{83}$$

Valutando l'equazione, otteniamo la condizione

$$\left(-\Omega^2 + \mathrm{i}\lambda\Omega + \omega_0^2\right) \alpha = f_0. \tag{84}$$

Quindi

$$\alpha = \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + \mathrm{i}\lambda\Omega}. \tag{85}$$

Il modulo di questa espressione è dato da

$$|\alpha| = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + \lambda^2}}, \tag{86}$$

mentre la fase ϕ soddisfa la relazione

$$\tan\phi = \frac{\lambda}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \tag{87}$$

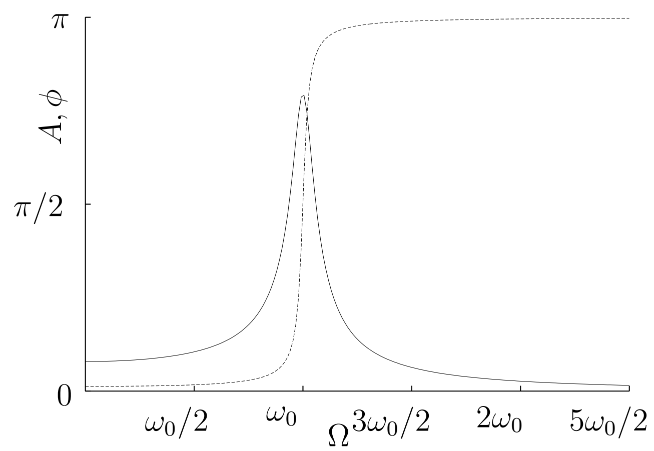

Figura 10. Ampiezza A (linea continua) e costante di fase ϕ (linea punteggiata) per un oscillatore forzato, in funzione della frequenza angolare Ω della forza applicata. L'ampiezza f_0 della forza periodica applicata è unitaria, e la costante $\lambda = 0.4\omega_0$.

Al variare di Ω, l'ampiezza A presenta un massimo per $\Omega = \omega_0$, tanto più pronunciato quanto più piccolo è λ. Allo stesso tempo la costante di fase ϕ varia da un piccolo valore λ/ω_0^2 a π, passando per il valore $\pi/2$ quando $\Omega = \omega_0$. Questo incremento del valore dell'ampiezza per frequenze della forzante vicine alla frequenza spontanea dell'oscillatore (non smorzato) è chiamata **risonanza**. Qualitativamente, la risonanza si manifesta per qualunque valore di λ, ma essa è praticamente inosservabile per $\lambda > 2\omega_0$.