

Oscillatore armonico in presenza di attrito o resistenza quadratica

L. P.

7 Marzo 2020

Mentre il problema del moto di una particella sottoposta a una forza elastica di richiamo e ad una resistenza proporzionale alla velocità ammette una soluzione analitica, questo non è il caso se sono presenti forze di attrito (di modulo costante) o di resistenza quadratica (di modulo proporzionale al quadrato della velocità). In questi appunti mostro come si possano trattare questi problemi.

1 Oscillatore armonico con attrito solido

Consideriamo un punto materiale di massa m che si muove in una retta orizzontale sotto l'effetto di una forza di richiamo elastica di costante di Hooke k diretta verso l'origine. Supponiamo inoltre che il corpo sia posto su un piano scabro di costante di attrito dinamico μ . Di conseguenza, se il corpo possiede una velocità \dot{x} , subisce una forza di attrito $-\text{sign } \dot{x} T$, dove $T = \mu mg$. Otteniamo così l'equazione del moto

$$m\ddot{x} = -m\omega^2 x - \text{sign } \dot{x} T, \quad (1)$$

dove $\omega^2 = k/m$. Notiamo che il secondo membro può essere scritto $m\omega^2(x + \text{sign } \dot{x} \ell)$, dove

$$\ell = \frac{T}{m\omega^2} = \frac{\mu g}{\omega^2}. \quad (2)$$

Otteniamo così le equazioni

$$\ddot{x} = -\omega^2(x + \ell), \quad \text{se } \dot{x} > 0; \quad (3)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2(x - \ell), \quad \text{se } \dot{x} < 0. \quad (4)$$

Data la posizione iniziale x_0 (con velocità nulla), il corpo comincerà a muoversi nella direzione delle x crescenti se $x < -\ell$, e in quello delle x decrescenti se $x > \ell$. Nel primo caso, la soluzione dell'equazione del moto sarà data da

$$x(t) = -\ell + (x_0 + \ell) \cos(\omega t), \quad 0 \leq t \leq \pi/\omega. \quad (5)$$

Nel secondo caso, avremo invece

$$x(t) = \ell + (x_0 - \ell) \cos(\omega t), \quad 0 \leq t \leq \pi/\omega. \quad (6)$$

C'è un evidente problema per $-\ell \leq x_0 \leq \ell$. In questo caso, però, dobbiamo tenere presente che, se $\dot{x} = 0$, il corpo è sottoposto all'attrito statico, che esercita una forza

f_s nella direzione opposta alla risultante delle forze applicate al corpo, fin tanto che $|f_s| < T_s$, dove $T_s = \mu_s mg > T$. Quindi se il corpo si trova ad essere in quiete nell'intervallo $[-\ell_s, \ell_s]$, dove $\ell_s = \mu_s / (m\omega^2) > \ell$, rimarrà in quiete ulteriormente.

Nel caso contrario, una volta raggiunta la quiete al di fuori dell'intervallo $[-\ell_s, \ell_s]$, il corpo ripartirà in direzione opposta. È evidente dalle equazioni che ogni volta che ciò accade, l'ampiezza del moto diminuirà. Indichiamo con $T(x_0)$ il punto in cui \dot{x} si annulla per un moto che parta da x_0 . Abbiamo

$$T(x_0) = \begin{cases} -x_0 - 2\ell, & \text{se } x_0 < -\ell; \\ 2\ell - x_0, & \text{se } x_0 > \ell. \end{cases} \quad (7)$$

Per fissare le idee, supponiamo di partire con $x_0 < -\ell$ ed abbastanza grande. Il corpo ritorna alla quiete nel punto $x_1 = -x_0 - 2\ell$, che supponiamo di essere grande e positivo, e in particolare maggiore di ℓ . Allora esso ripartirà con velocità negativa, e tornerà in quiete nel punto $x_2 = x_0 + 4\ell$. Se ancora $x_2 < -\ell$, il ciclo potrà ripetersi, finché non avremo un k per cui $|x_k| \leq \ell_s$. Notiamo che ogni ciclo dura $\mathcal{T} = \pi/\omega$, e che l'ampiezza del moto diminuisce di 2ℓ a ogni ciclo. Quindi il decadimento dell'ampiezza è lineare nel tempo, ed essa raggiunge 0 se il corpo viene a trovarsi in quiete nell'intervallo $[-\ell_s, \ell_s]$. Un esempio è mostrato in figura.

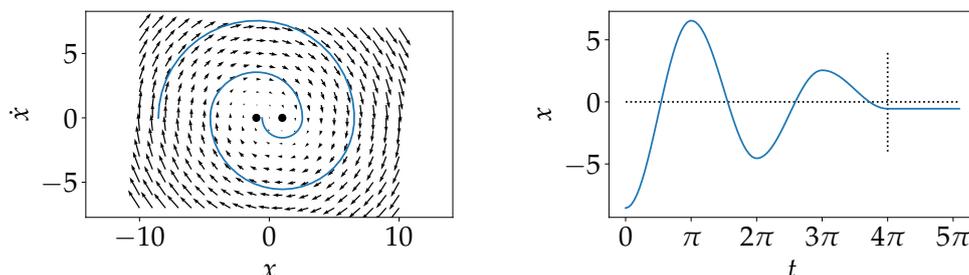


Figura 1: Sinistra: Campo di velocità nello spazio delle fasi per $m = 1$, $\omega = 1$ e $\ell = 1$. I punti $(\pm\ell, 0)$ sono marcati. È mostrata anche una traiettoria che parte da $x_0 = -8.55$ con velocità nulla, e termina dopo quattro cicli. Destra: Legge oraria del moto per la traiettoria mostrata nella figura di sinistra. La linea verticale a $t = 4\pi$ indica l'istante in cui la particella va in quiete.

2 Oscillatore armonico con resistenza quadratica

È noto che per velocità sostenute la resistenza esercitata da un fluido è proporzionale al quadrato della velocità stessa, piuttosto che alla velocità. In questa situazione non sono stato in grado di trovare una soluzione esplicita alle equazioni del moto

$$m\ddot{x}(t) = -m\omega^2 x(t) - \lambda \text{sign } \dot{x}(t) (\dot{x}(t))^2. \quad (8)$$

È però possibile analizzare qualitativamente il moto come segue. La costante λ ha dimensioni $[m\ell^{-1}]$, e permette quindi di definire una lunghezza ℓ tramite la

relazione

$$\lambda = \frac{m}{\ell}. \quad (9)$$

Supponiamo che l'ampiezza delle oscillazioni sia piccola rispetto a ℓ . In questo caso, il lavoro compiuto dalla forza resistente può essere valutato trascurando in prima approssimazione l'effetto della forza sul moto stesso. Supponendo per fissare le idee che il moto sia descritto, nell'intervallo $0 \leq t \leq \pi/\omega$ dalla legge

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t), \quad (10)$$

questo lavoro vale

$$W = - \int_0^{\pi/\omega} dt \frac{m}{\ell} x_0^3 \omega^3 \sin^3(\omega t) = -\text{const.} m\omega^2 \frac{x_0^3}{\ell}. \quad (11)$$

Quindi l'energia della particella, che è proporzionale a $m\omega^2 x_0^2$, diminuirà di una quantità pari a W , il che implica che

$$\Delta x_0^2 \approx -\text{const.} \frac{x_0^3}{\ell}. \quad (12)$$

Questo implica

$$\Delta x_0 \approx -\text{const.} \frac{x_0^2}{\ell}, \quad (13)$$

ovvero, ponendo x_1 per l'ampiezza del moto alla fine dell'intervallo,

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0} \propto \frac{\ell}{x_0}. \quad (14)$$

Quindi l'ampiezza del moto decresce come l'inverso del tempo. Evidentemente a un certo punto la resistenza verrà ad essere dominata dall'ordinario termine lineare, per cui l'ampiezza del moto comincerà a diminuire in modo esponenziale, molto più rapidamente. Per esempio, in fig. 4 mostriamo la traiettoria nello spazio delle fasi di una particella che soddisfa l'equazione del moto

$$m\ddot{x}(t) = -m\omega^2 x(t) - \lambda \text{sign} \dot{x}(t) (\dot{x}(t))^2 - \gamma \dot{x}(t), \quad (15)$$

per $\lambda = 1/4$, $\gamma = 0.1$,

Se $x_0 \gg \ell$, si raggiunge un regime in cui la resistenza bilancia approssimativamente la forza di richiamo. Si ha così

$$\frac{1}{\ell} \text{sign} \dot{x} \dot{x}^2 = -x. \quad (16)$$

Questo regime si mantiene fin tanto che l'energia E della particella non soddisfa

$$\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} < \frac{1}{\ell}. \quad (17)$$

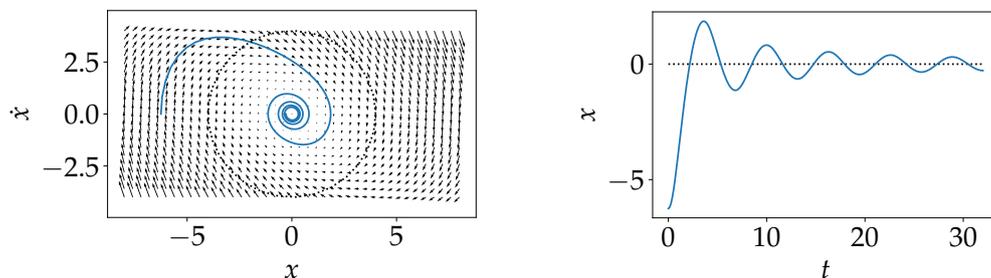


Figura 2: Sinistra: Esempio di una traiettoria della particella con $\ell = 4$ e condizione iniziale $x(0) = -6.25$, $\dot{x}(0) = 0$. Si nota il rapido avvicinamento al regime in cui l'ampiezza decresce come l'inverso del tempo. Il cerchio di raggio ℓ racchiude approssimativamente la regione in cui vale il regime descritto dall'equazione (14). Destra: Legge oraria del moto per la traiettoria mostrata a sinistra.

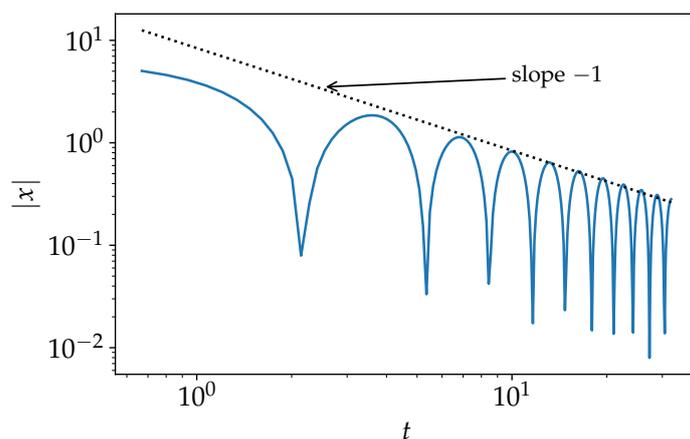


Figura 3: Grafico log-log della legge oraria mostrata in fig. 2 (destra), confrontata con una retta di pendenza -1 . Si vede un regime con ampiezza decrescente come t^{-1} .

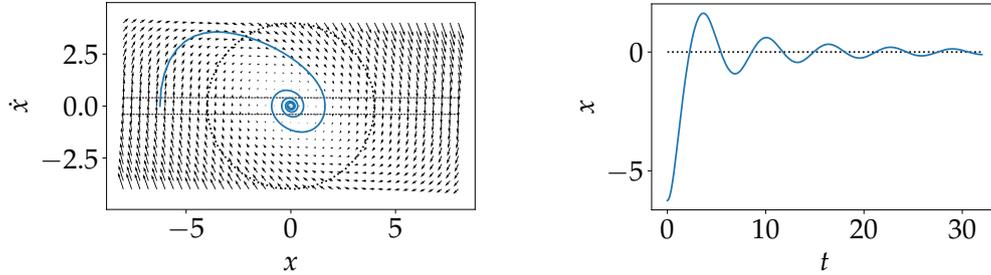


Figura 4: Sinistra: Esempio di una traiettoria della particella con $\ell = 4$, $\gamma = 0.075$ e condizione iniziale $x(0) = -6.25$, $\dot{x}(0) = 0$. Si nota il rapido avvicinamento al regime in cui l'ampiezza decresce come l'inverso del tempo, e il successivo regime esponenziale. Il cerchio di raggio ℓ racchiude approssimativamente la regione in cui vale il regime descritto dall'equazione (14). Le rette parallele all'asse x racchiudono la regione $|\dot{x}| \leq \gamma/\lambda$, in cui la resistenza lineare domina quella quadratica. Destra: Legge oraria del moto per la traiettoria mostrata a sinistra.

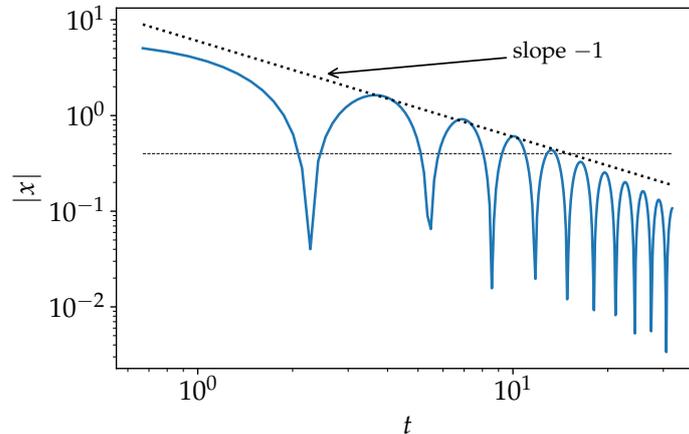


Figura 5: Grafico log-log della legge oraria mostrata in fig. 4 (destra), confrontata con una retta di pendenza -1 . Si vede un regime con ampiezza decrescente come t^{-1} , seguito da un regime di decrescita più rapida. La linea orizzontale corrisponde a $|x| = \gamma\omega/\sqrt{\lambda^2 m}$, cioè a un'energia in cui la resistenza lineare diventa dominante.