

Gravitazione

L. P.

Aprile 2010

1. Forze centrali

Consideriamo un punto materiale dotato di caratteristiche tali che, supponendo che esso venga posto in un punto P di una data regione di spazio, subisce una forza \mathbf{f} che dipende solo dal punto P. Si dice allora che il punto materiale è soggetto a un **campo di forze**.

Il caso più familiare di un campo di forze è l'ordinaria forza-peso. In questo caso, un punto materiale di massa m subisce una forza $\mathbf{f} = m\mathbf{g}$, dove \mathbf{g} è l'accelerazione di gravità, diretta verticalmente verso il basso (essa *definisce* la direzione verticale e il verso alto/basso) e di modulo approssimativamente costante e pari a 9.807 ms^{-2} . In questo caso particolare, quindi, la forza applicata è indipendente da P. Si parla di campo di forze **uniforme**.

Consideriamo adesso il caso di un campo di forze per il quale esiste un punto O dello spazio tale che

- La forza \mathbf{f} nel punto P è sempre parallela al raggio vettore $\mathbf{r} = \text{OP}$ che da O porta a P;
- La componente di \mathbf{f} nella direzione di \mathbf{r} dipende solo dal modulo r di \mathbf{r} .

Quindi, ovviamente, tanto il modulo f di \mathbf{f} che il suo verso (diretto verso O o nel verso opposto) dipendono solo da r . Un campo di forze di questo tipo è detto **forza centrale**, e O è chiamato il suo centro.

1.1. Conservatività delle forze centrali

È interessante notare che un campo di forze centrale è *sempre conservativo*, e che l'energia potenziale corrispondente dipende solo da r . Per mostrarlo, facciamo vedere che il lavoro W compiuto dalla forza centrale nello spostare il punto materiale da un punto A posto a distanza r_A dal centro a un punto B posto a distanza r_B dal centro dipende solo da r_A ed r_B .

Per definizione, abbiamo

$$W = \int_A^B \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}, \quad (1)$$

dove l'integrale viene valutato lungo il cammino che porta da A a B. Consideriamo un piccolo spostamento $d\mathbf{r}$ attorno al punto identificato dal raggio vettore \mathbf{r} . Poiché \mathbf{f} è parallelo a \mathbf{r} , contribuisce all'integrale solo la componente di $d\mathbf{r}$ parallela a \mathbf{r} . D'altra parte, la componente di \mathbf{f} nella direzione di \mathbf{r} , chiamiamola $f_r(r)$, dipende solo da r . Quindi possiamo scrivere

$$W = \int_{r_A}^{r_B} f_r(r) dr. \quad (2)$$

Indichiamo con $U(r)$ l'integrale di $f_r(r)$ da r fino a un punto arbitrario, posto a distanza r_0 dal centro:

$$U(r) = \int_r^{r_0} f_r(r') dr'. \quad (3)$$

Se $f_r(r)$ decresce abbastanza rapidamente con r , si sceglie di solito $r_0 \rightarrow \infty$; altrimenti si sceglie spesso $r_0 = 0$. Comunque, definito $U(r)$ con una scelta fissata di r_0 , si ha evidentemente

$$W = \int_{r_A}^{r_B} f_r(r) dr = -(U(r_B) - U(r_A)). \quad (4)$$

È evidente che $U(r)$ è l'**energia potenziale** del campo di forze centrale. Essa, come annunciato, dipende solo da r .

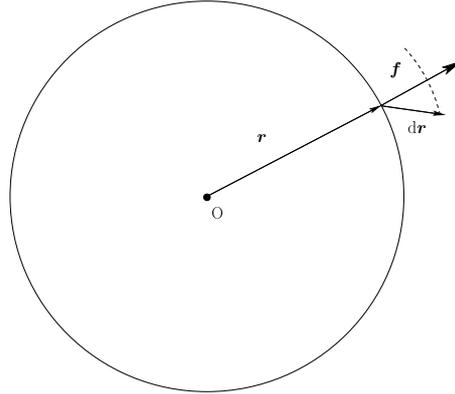


Figura 1. Lavoro in un campo di forze centrale.

2. Moto in un campo di forze centrale

2.1. Moto circolare uniforme

Consideriamo un punto materiale di massa m che si muove di moto circolare uniforme attorno al centro O di un campo di forze centrale. Sia r la sua distanza da O e v il modulo della sua velocità. L'accelerazione subita dal punto materiale è centripeta, diretta cioè verso O , e il suo modulo vale

$$a = \frac{v^2}{r}. \quad (5)$$

Applicando la legge di Newton al nostro punto materiale possiamo valutare la forza f subita dal nostro corpo. Essa è diretta verso O (si dice che è *centripeta*) e vale, in modulo

$$f = \frac{mv^2}{r}. \quad (6)$$

In un campo di forze centrale il modulo f della forza dipende solo da r . Se supponiamo nota questa dipendenza, possiamo leggere la (6) come una relazione che ci dà il modulo $v(r)$ in funzione di r della velocità per un moto circolare uniforme. Si ha

$$v(r) = \sqrt{r f(r)/m}. \quad (7)$$

Poiché la lunghezza della traiettoria circolare è pari a $2\pi r$, possiamo anche ricavare il periodo $T(r)$ del moto:

$$T(r) = 2\pi r/v(r) = 2\pi\sqrt{mr/f(r)}. \quad (8)$$

In particolare, se la forza $f(r)$ dipende da r come una potenza,

$$f(r) \propto r^\alpha, \quad (9)$$

si ha

$$T(r) \propto r^{(1-\alpha)/2}. \quad (10)$$

Se $\alpha = 1$, cioè se il modulo di f è proporzionale a r (**legge di Hooke**, che vale per gli oscillatori armonici isotropi), otteniamo $T(r) \propto r^0$, cioè una costante. Questa è la **legge dell'isocronismo** degli oscillatori armonici, che vale quindi anche nel caso tridimensionale.

2.1.1. Terza legge di Keplero. D'altra parte, se $\alpha = -2$, cioè se la forza decresce come l'inverso del quadrato della distanza, si ha $T(t) \propto r^{3/2}$. Questo è l'andamento approssimativo degli "anni planetari", cioè dei periodi di rivoluzione dei pianeti attorno al Sole, come fu notato da Johannes Kepler nel suo libro *Harmonices Mundi* (1619). Questo risultato è noto come la **terza legge di Keplero**. È interessante notare che diverse persone, nella seconda metà del XVII secolo, erano giunte alla conclusione che il sole esercitasse sui pianeti una forza attrattiva inversamente proporzionale al quadrato della distanza: fra loro Hooke e Halley. Sostanzialmente essi si basavano sulla (8), considerando $T(r)$ noto e $f(r)$ da determinare. Tuttavia nessuno di loro era stato capace di dedurre la traiettoria dei pianeti.

Tabella 1. Distanze approssimative dal sole dei principali pianeti, e durata del relativo anno planetario. Le distanze sono misurate in unità astronomiche (1 UA è uguale alla distanza media Terra-Sole) e le durate in anni terrestri.

Pianeta	Distanza	Durata
Mercurio	0.387	0.241
Venere	0.72	0.15
Terra	1.0	1.0
Marte	1.52	1.88
Giove	5.20	11.86
Saturno	9.54	29.46
Urano	19.42	84.01
Nettuno	30.06	164.8

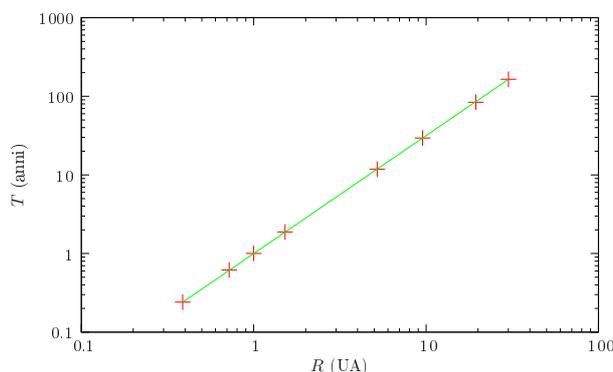


Figura 2. Durata T (in anni terrestri) dell'anno planetario per i pianeti maggiori, espressa in funzione della distanza media dal Sole R (in UA). Entrambi gli assi sono in scala logaritmica. La retta corrisponde a $T = aR^{3/2}$, con a posto uguale a 1 perché passi per il punto corrispondente alla Terra.

2.2. Conservazione del momento angolare

In un campo di forze centrale, indicando con \mathbf{r} il raggio vettore che dal centro O della forza porta alla posizione istantanea P del corpo, la forza \mathbf{f} è parallela a \mathbf{r} . Quindi il momento \mathbf{L} della forza rispetto al centro O si annulla, perché il prodotto vettoriale di vettori paralleli fra loro è nullo:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{f} = 0. \quad (11)$$

Dato che la derivata rispetto al tempo del momento angolare \mathbf{M} , preso rispetto al centro O della forza, è pari al corrispondente momento \mathbf{L} della forza, otteniamo il seguente risultato:

Se un punto materiale è soggetto a un campo di forze centrale rispetto al punto O , il suo momento angolare rispetto a O è costante nel tempo.

Vediamo le conseguenze di questo risultato.

- Poiché $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ è costante nel tempo, il raggio vettore \mathbf{r} è sempre normale a \mathbf{M} .
- Quindi il moto del corpo si svolge nel piano normale a \mathbf{M} che passa per O .
- Poiché M è costante, possiamo dedurre, come abbiamo visto, che la velocità areolare è costante.

Notiamo una conseguenza del punto c). È facile vedere che la velocità areolare è pari al prodotto di r per la componente della velocità normale a \mathbf{r} , diviso 2. Quindi

- La componente v_{\perp} delle velocità normale al raggio vettore \mathbf{r} è inversamente proporzionale alla distanza r dal centro.

Questo risultato suggerisce di descrivere il moto del corpo mediante coordinate polari nel piano normale a \mathbf{M} e passante per O . Scegliamo gli assi cartesiani in modo che questo piano coincida con il piano xy .

Si ha allora

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}; \quad (12)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad (13)$$

$$\mathbf{v} = \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j}; \quad (14)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = (x\dot{y} - y\dot{x}) \mathbf{k}. \quad (15)$$

Introduciamo le coordinate polari (r, ϕ) , tali che

$$x = r \cos \phi; \quad (16)$$

$$y = r \sin \phi. \quad (17)$$

Decomponiamo la velocità \mathbf{v} nelle componenti parallela v_{\parallel} e perpendicolare v_{\perp} rispetto a \mathbf{r} :

$$v_{\parallel} = \dot{r}; \quad (18)$$

$$v_{\perp} = r\dot{\phi}. \quad (19)$$

Avremo

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = mr^2\dot{\phi} \mathbf{k}. \quad (20)$$

Quindi $\dot{\phi}$, per un moto dato, dipende solo da r :

$$\dot{\phi} = \frac{M}{mr^2}, \quad (21)$$

dove M è la componente del momento angolare lungo l'asse z .

2.3. Conservazione dell'energia

Poiché il campo di forze centrale è conservativo, l'energia meccanica si conserva. Avremo quindi, istante per istante,

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(\mathbf{r}) = E = \text{cost.} \quad (22)$$

La costante E viene fissata dalle condizioni iniziali. Poiché, come abbiamo visto, $U(\mathbf{r})$ dipende solo dalla distanza r dal centro, una volta fissato E anche il modulo v della velocità dipenderà solo da r :

$$v = \sqrt{2(E - U(r)) / m}. \quad (23)$$

Ma abbiamo appena visto che v_{\perp} dipende solo da r a causa della conservazione del momento angolare. Poiché

$$v^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2, \quad (24)$$

possiamo valutare anche v_{\parallel} in funzione di r . Quindi, nota l'energia totale E e il momento angolare M possiamo valutare la velocità \mathbf{v} in funzione di r . Otteniamo così \dot{r} e $\dot{\phi}$, per cui l'intera legge del moto può essere valutata tramite una semplice integrazione. Si dice che il moto di un punto materiale in un campo di forze centrale può essere **ridotto alle quadrature**.

Noi non seguiremo questa via nel caso generale, ma considereremo esplicitamente soltanto due casi in cui la soluzione si ottiene in maniera ancora più semplice.

2.4. Moto in un campo armonico isotropo

Un campo armonico isotropo è un campo di forze centrale in cui la forza è proporzionale alla distanza r dal centro. L'energia potenziale di questa forza è proporzionale a r^2 :

$$U(r) = \frac{1}{2}\kappa r^2 = \frac{1}{2}\kappa (x^2 + y^2 + z^2). \quad (25)$$

Per convenzione, abbiamo preso r_0 (che serve a definire univocamente l'energia potenziale) pari a 0. La costante κ che appare in questa formula è la **costante di Hooke**. Si suppone che κ sia positiva. Derivando questa relazione è facile vedere che la forza \mathbf{f} in un punto P, definito dal reggio vettore \mathbf{r} che dal centro O della forza porta in P, è data da

$$\mathbf{f} = -\kappa \mathbf{r}. \quad (26)$$

Essa è quindi proporzionale a \mathbf{r} ed è diretta verso O.

Supponiamo ora data l'energia totale E e il momento angolare \mathbf{M} preso rispetto al centro della forza. Scegliamo la terna di assi cartesiani in modo che \mathbf{M} sia diretto lungo l'asse z con verso positivo. Il moto si svolge dunque nel piano xy .

Consideriamo le equazioni di Newton per la nostra particella in questo piano. Proiettando l'equazione di Newton $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}$ lungo gli assi coordinati, e sfruttando la (26), otteniamo

$$m\ddot{x} = -\kappa x; \quad (27)$$

$$m\ddot{y} = -\kappa y. \quad (28)$$

Quindi, in questo caso, le equazioni del moto si scindono in due equazioni indipendenti per la coordinata x e la coordinata y . Queste equazioni sono le stesse che abbiamo incontrato discutendo l'oscillatore armonico unidimensionale, e come sappiamo, ammettono una soluzione oscillante:

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi_x); \quad (29)$$

$$y(t) = Y_0 \cos(\omega t + \varphi_y). \quad (30)$$

Abbiamo introdotto la **frequenza angolare** o **pulsazione** ω , collegata alla costante di Hooke κ e alla massa m del punto materiale dalla relazione

$$\omega^2 = \frac{\kappa}{m}. \quad (31)$$

(Ricordo che abbiamo supposto $\kappa > 0$.) Le costanti (X_0, Y_0) e (φ_x, φ_y) sono determinate dalle condizioni iniziali.

Valutiamo adesso l'energia totale E e la componente z del momento angolare (che indicheremo con M). Derivando la legge del moto (29,30), otteniamo la velocità:

$$v_x(t) = -\omega X_0 \sin(\omega t + \varphi_x); \quad (32)$$

$$v_y(t) = -\omega Y_0 \sin(\omega t + \varphi_y). \quad (33)$$

Possiamo allora valutare l'energia totale E in un istante arbitrario:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\kappa (x^2(t) + y^2(t)) + \frac{1}{2}m (v_x^2(t) + v_y^2(t)) \\ &= \frac{1}{2}\kappa (X_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi_x) + Y_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi_y)) \\ &\quad + \frac{1}{2}m\omega^2 (X_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi_x) + Y_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi_y)) \\ &= \frac{1}{2}\kappa (X_0^2 + Y_0^2). \end{aligned} \quad (34)$$

Abbiamo sfruttato la (31) e la relazione $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$. Abbiamo così confermato la conservazione dell'energia.

Valutiamo adesso M . Si ha

$$\begin{aligned} M &= m (xv_y - yv_x) \\ &= mX_0Y_0 (-\cos(\omega t + \varphi_x) \sin(\omega t + \varphi_y) + \cos(\omega t + \varphi_y) \sin(\omega t + \varphi_x)) \\ &= mX_0Y_0 \sin(\varphi_y - \varphi_x), \end{aligned} \quad (35)$$

dove abbiamo sfruttato la relazione trigonometrica $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$. Abbiamo confermato quindi anche la conservazione del momento angolare. Notiamo che l'energia totale dipende solo da (X_0, Y_0) , mentre il momento angolare dipende anche dalle costanti di fase (φ_x, φ_y) .

Si può mostrare che la traiettoria percorsa dalla particella è, nel caso generale, un'ellisse il cui centro coincide con il centro O delle forze.

3. Campo gravitazionale

Studiamo adesso il moto di un punto materiale di massa m in un campo di forze centrale, in cui la forza è inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Come abbiamo notato prima, il fatto che la durata degli anni planetari sia approssimativamente proporzionale a $r^{3/2}$, dove r è la distanza media dal Sole, aveva suggerito a diversi studiosi che il Sole esercitasse sui pianeti una forza attrattiva con questo andamento. Altrettanto importante è la conclusione *che questa forza fosse proporzionale*

alla massa del pianeta. Solo in questo caso, in effetti, la durata dell'anno planetario poteva dipendere solo dalla distanza r , e non da altre caratteristiche del pianeta.

Ma se la forza d'attrazione del Sole è proporzionale alla massa del pianeta, essa è analoga alla forza-peso terrestre: di qui l'audace ipotesi di Newton che la forza-peso terrestre fosse della stessa natura delle forze che teneva i pianeti nelle loro orbite. Per verificare questa ipotesi, Newton confrontò l'intensità della forza-peso sulla superficie terrestre (che vale 9.807 ms^{-2}) con la forza necessaria a mantenere la Luna nella sua orbita. La distanza media della Luna dalla Terra è pari a $384 \cdot 10^3 \text{ km}$, e la durata di una rivoluzione completa attorno alla Terra è di 27.3 giorni (si tratta della durata del mese *siderale*, rapportato cioè alle stelle fisse), cioè di $236 \cdot 10^4 \text{ s}$. La velocità della Luna è pari quindi a 1.024 km s^{-1} , e la sua accelerazione è pari a $2.728 \cdot 10^{-6} \text{ km s}^{-2}$, cioè $2.728 \cdot 10^{-3} \text{ ms}^{-2}$. Il rapporto fra l'accelerazione di gravità alla superficie terrestre e l'accelerazione subita dalla Luna è quindi circa 3600. Ora, il raggio della Terra è di circa 6400 km, e il rapporto fra la distanza della Luna e il raggio terrestre è quindi approssimativamente pari a 60, cioè alla radice quadrata di 3600! Nelle parole di Newton,

[I] thereby compared the force requisite to keep the Moon in her Orb with the force of gravity at the surface of the earth, & found them answer pretty nearly.

Credo che sia Stanislaw J. Lec ad avere osservato che ci voleva il genio di Newton per rispondere all'antica domanda "Perché la Luna non cade sulla Terra?" con l'osservazione che la Luna sta effettivamente cadendo!

A questo punto possiamo cercare di valutare l'orbita di un punto materiale in un campo di forze centrale d'intensità proporzionale a r^{-2} . Questa fu la domanda che Halley pose a Newton a Cambridge nell'agosto 1684. Ecco il racconto di questo incontro nelle parole del confidente di Newton Abraham DeMoivre:

Nel 1684 il Dr. Halley lo venne a visitare a Cambridge, e dopo aver passato qualche tempo insieme, il Dr. gli domandò quale pensava che fosse la curva che verrebbe descritta dai Pianeti supponendo che la forza di attrazione verso il Sole fosse reciproca al quadrato della loro distanza da esso. Sr. Isaac rispose immediatamente che sarebbe un'ellisse, e il Dr., preso dalla gioia e dalla meraviglia, gli chiese come faceva a saperlo, "Perché?" rispose, "l'ho calcolata", e quindi il Dr. Halley gli richiese di avere i calcoli senza altro indugio, ma Sr. Isaac, guardando fra le sue carte, non li poté trovare, ma gli promise di riprodurli e di spedirglieli...

Perché Halley era stato preso da tanta gioia? Perché la risposta di Newton era in accordo con la legge empirica, nota come **prima legge di Keplero**, ricavata dalle osservazioni del moto dei pianeti:

Le orbite dei pianeti sono delle ellissi di cui il Sole occupa uno dei fuochi.

In questo modo, la legge dell'inverso del quadrato della distanza, inferita dalla terza legge, veniva ad avere come conseguenza la prima legge.

Evidentemente esiste anche la **seconda legge di Keplero**. Essa dice che la velocità areolare dei pianeti, riferita al Sole, è costante. Nella formulazione più tradizionale, suona così:

Il raggio vettore che dal Sole porta a un pianeta dato spazza aree uguali in tempi uguali.

Come abbiamo visto, questo comportamento è *più generale* di quello descritto dalle altre due leggi, poiché vale *per qualunque campo di forze centrale*.

Notiamo che l'audacia di Newton si era spinta fino a supporre tranquillamente che l'effetto dell'attrazione della Terra su un punto posto sulla sua superficie abbia lo stesso valore come se il punto fosse posto a distanza R dal centro delle forze, dove R è il raggio terrestre. Questa proprietà non è affatto ovvia. In effetti la mancata giustificazione di questa ipotesi fu probabilmente la ragione per cui Newton ritardò di circa 20 anni la pubblicazione dei suoi risultati. Vedremo che questa proprietà vale per i soli campi di forze la cui intensità decresce come l'inverso del quadrato della distanza.

Traiettorie in un campo gravitazionale. Nel 1684 solo Newton era in grado di dimostrare che un punto materiale in un campo di forze centrale con andamento in r^{-2} era un'ellisse (o, più in generale, una conica). Questo risultato non è banale, per cui riporto qui i calcoli solo per soddisfare la vostra curiosità. Il problema della determinazione del moto di un punto materiale in questo campo di forze è noto come **problema di Keplero**.

Come abbiamo visto, il moto si svolge in un piano, che possiamo scegliere come piano xy . Identifichiamo il punto P in cui il corpo passa più vicino al centro delle forze (nel caso di un pianeta

orbitante attorno al Sole, questo punto è chiamato il **perielio**). Poniamo l'asse x nella direzione OP. Indichiamo con ϕ l'angolo che il raggio vettore \mathbf{r} fa con l'asse delle x .

Supponiamo di avere a che fare con un *campo gravitazionale*. Quindi il moto di un punto materiale non dipende dalla sua massa. Porremo quindi $m = 1$ per semplificare le formule. La forza che si esercita a distanza r dal centro vale μ/r^2 , dove μ è una certa costante.

Il momento angolare vale $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = rv_{\perp}$, dove v_{\perp} è la componente di \mathbf{v} normale a \mathbf{r} . In termini delle coordinate polari (r, ϕ) abbiamo

$$rv_{\perp} = r^2\dot{\phi} = M = \text{cost.} \quad (36)$$

Quindi

$$\dot{\phi} = \frac{M}{r^2}. \quad (37)$$

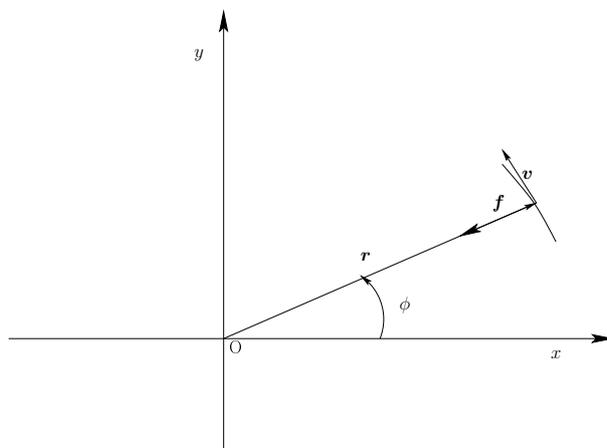


Figura 3. Il problema di Keplero in coordinate polari.

Scriviamo adesso la legge di Newton, decomponendo la forza in coordinate cartesiane. Abbiamo

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{\mu}{r^2} \cos \phi; \quad (38)$$

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = -\frac{\mu}{r^2} \sin \phi. \quad (39)$$

Moltiplichiamo ambo i membri per $\dot{\phi} = dt/d\phi$, e teniamo presente la (37). Otteniamo

$$\frac{d\dot{x}}{d\phi} = -\frac{\mu}{M} \cos \phi; \quad (40)$$

$$\frac{d\dot{y}}{d\phi} = -\frac{\mu}{M} \sin \phi; \quad (41)$$

Possiamo adesso integrare membro a membro, ottenendo

$$\dot{x} = -\frac{\mu}{M} \sin \phi + A; \quad (42)$$

$$\dot{y} = \frac{\mu}{M} \cos \phi + B. \quad (43)$$

Qui A e B sono delle costanti d'integrazione. Tuttavia, avendo scelto di mettere l'asse x in corrispondenza del perielio, si deve avere $\dot{x} = 0$ per $\phi = 0$. Quindi la costante A deve annullarsi. D'altra parte

$$x = r \cos \phi; \quad (44)$$

$$y = r \sin \phi. \quad (45)$$

Quindi

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \phi - r\dot{\phi} \sin \phi = -\frac{\mu}{M} \sin \phi; \quad (46)$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \phi + r\dot{\phi} \cos \phi = \frac{\mu}{M} \cos \phi + B. \quad (47)$$

Moltiplichiamo la prima equazione per $-\sin \phi$ e la seconda per $\cos \phi$ e sommiamo. Otteniamo

$$r\dot{\phi} = \frac{\mu}{M} + B \cos \phi, \quad (48)$$

che, sfruttando la (37), può essere scritta

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{M^2} + \frac{B}{M} \cos \phi. \quad (49)$$

Si può vedere facilmente che questa è l'equazione di una conica, con uno dei fuochi posto nell'origine. Consideriamo per esempio il caso dell'ellisse, e supponiamo che il secondo fuoco sia posto nel punto nel punto P di coordinate $(-p, 0)$. Allora l'equazione dell'ellisse è

$$\overline{OX} + \overline{PX} = r + \sqrt{(r \cos \phi + p)^2 + r^2 \sin^2 \phi} = C, \quad (50)$$

dove C è una certa costante. Questa relazione è equivalente a

$$r^2 \cos^2 \phi + 2rp \cos \phi + p^2 + r^2 \sin^2 \phi = C^2 - 2Cr + r^2,$$

cioè

$$2rp \cos \phi + 2Cr = C^2 - p^2,$$

ovvero, dividendo per $(C^2 - p^2)r$

$$\frac{1}{r} = \frac{2C}{C^2 - p^2} + \frac{2p}{C^2 - p^2} \cos \phi, \quad (51)$$

che corrisponde alla (49), con $\mu/M^2 = 2C/(C^2 - p^2)$ e $B/M = 2p/(C^2 - p^2)$. Le altre coniche si ottengono cambiando il segno di p (l'iperbole), o passando al limite $C \rightarrow \infty$, $p \rightarrow \infty$, con $C - p = a = \text{cost.}$ (la parabola).

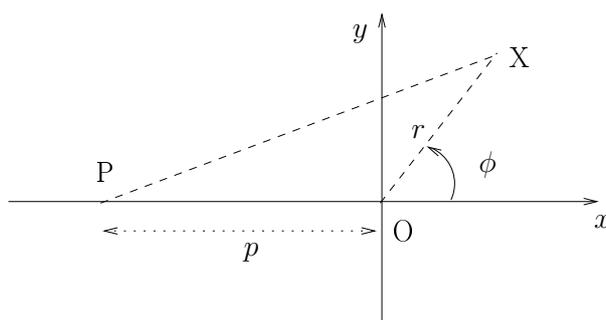


Figura 4. Equazione dell'ellisse in coordinate polari.

3.1. Energia potenziale nel campo gravitazionale

Consideriamo il campo gravitazionale dovuto al Sole, in cui la forza esercitata su un corpo di massa m a distanza r è di intensità pari a $m\mu/r^2$. La costante μ , per il caso del moto dei pianeti attorno al Sole, è approssimativamente uguale a $1.38 \cdot 10^{20} \text{ m}^3\text{s}^{-2}$.

Valutiamo adesso l'integrale $\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ su un cammino che, da un punto iniziale posto a distanza r dal Sole, porta all'infinito. Poiché la forza è diretta verso il sole, questo integrale è negativo. Si ha

$$\int_r^\infty \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = - \int_r^\infty \frac{m\mu}{(r')^2} dr' = -\frac{m\mu}{r}. \quad (52)$$

Quindi l'energia potenziale di un corpo di massa m in un campo gravitazionale di costante μ è pari a $U(r) = -m\mu/r$. Come previsto, essa dipende solo da r . Inoltre è proporzionale alla massa m ed è *negativa*.

Da questa espressione e dalla conservazione dell'energia possiamo prevedere a grandi linee il comportamento di un corpo che si trovi inizialmente a distanza r e sia animato da una velocità iniziale v . Il comportamento dipenderà dal segno dell'energia totale

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{m\mu}{r} = \frac{1}{2}m \left(v^2 - \frac{2\mu}{r} \right). \quad (53)$$

- Se $E < 0$, cioè se $v < v_f = \sqrt{2\mu/r}$, il moto del corpo sarà limitato. Esso quindi percorrerà un'ellisse.
- Se $E > 0$, cioè se $v > v_f$, il moto sarà illimitato. Esso quindi percorrerà un'iperbole.
- Se $E = 0$, si può vedere che esso percorrerà una parabola.

Per il campo gravitazionale solare, a una distanza uguale alla distanza media Terra-Sole, la **velocità di fuga** v_f vale approssimativamente $42.2 \cdot 10^3 \text{ ms}^{-1}$. Questa velocità è anche nota come **terza velocità cosmica**. Notiamo che la velocità con cui vengono lanciate le sonde spaziali, misurata *rispetto alla Terra*, sono molto più piccole. Evidentemente, se la sonda viene lanciata “in avanti” rispetto alla Terra, potrà fare uso della notevole velocità di cui la Terra stessa è animata nella sua rivoluzione. Analogamente, possiamo domandarci il valore della velocità di fuga dal campo gravitazionale terrestre. Per un corpo alla superficie terrestre, essa vale $11.2 \cdot 10^3 \text{ ms}^{-1}$. Questa è anche chiamata **seconda velocità cosmica**, essendo la velocità minima con cui un corpo, partendo dalla superficie terrestre, può giungere a sfuggire al campo gravitazionale della Terra. Di nuovo, non è necessario raggiungere questa velocità per lanciare delle sonde, perché, come si vede dalla sua espressione, v_f diminuisce all'aumentare della distanza dal centro della Terra. La **prima velocità cosmica** v_1 è la velocità di un satellite in orbita circolare attorno alla Terra appena fuori dell'atmosfera. Essa si ottiene uguagliando l'accelerazione centripeta v_1^2/R del satellite (dove R è approssimativamente il raggio terrestre) con l'accelerazione di gravità standard g . Si ottiene $v_1 = 7.92 \cdot 10^3 \text{ ms}^{-1}$.

È da notare che la *terza legge di Keplero* vale anche per le orbite ellittiche, purché alla distanza media dal centro si sostituisca la lunghezza dell'asse maggiore dell'orbita.

4. Gravitazione universale

Consideriamo adesso la forza di attrazione del Sole sui pianeti alla luce della terza legge di Newton:

Se un corpo A esercita una forza \mathbf{f} su un corpo B, allora il corpo B esercita su A una forza $-\mathbf{f}$, ed entrambe queste forze sono parallele alla retta che congiunge A e B.

Quindi, se il Sole attira un pianeta con una forza $\mu m/r^2$, anche il pianeta deve attirare il Sole con una forza $\mu_p M/r^2$, dove M è la massa del Sole, e μ_p è una costante caratteristica del pianeta. Ora non c'è una distinzione di fondo tra il Sole e il pianeta, e quindi la forza con cui il Sole e il pianeta si attraggono deve essere proporzionale tanto alla massa m del pianeta che a quella, M del Sole: abbiamo quindi

$$f = G \frac{Mm}{r^2}. \quad (54)$$

Da questo ragionamento otteniamo la **legge di gravitazione universale**:

Due punti materiali qualunque di massa rispettiva m e M , posti alla distanza r l'uno dall'altro, si attraggono con una forza \mathbf{f} di modulo pari a GMm/r^2 . Questa forza è diretta lungo la congiungente i due corpi. La costante G è universale.

La **costante di gravitazione universale** G venne misurata in delicati esperimenti da Cavendish alla fine del XVIII secolo. Il suo valore accettato oggi è approssimativamente uguale a $6.73 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$.

4.1. Il problema dei due corpi

Vediamo come queste considerazioni influiscono sulle conclusioni che avevamo raggiunto sul moto dei pianeti attorno al Sole. Consideriamo quindi un pianeta di massa m posto a distanza r dal Sole, la cui massa sarà indicata con m_\odot . Mettiamoci nel sistema di riferimento il cui la quantità di moto totale, $m\mathbf{v} + m_\odot\mathbf{v}_\odot$, è nulla (\mathbf{v} indica la velocità del pianeta, \mathbf{v}_\odot quella del Sole). La terza legge di Newton ci garantisce che, se questo è vero a un certo istante t , e se sui due corpi non agiscono altre forze, ciò sarà vero anche in séguito. A questo punto mostriamo che la terza legge di Newton implica che anche il momento angolare totale \mathbf{M}_{tot} , preso rispetto a un punto arbitrario P, rimane costante.

Indichiamo con \mathbf{M} il momento angolare del pianeta, e con \mathbf{M}_\odot quello del Sole. Abbiamo, p.es.,

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}, \quad (55)$$

dove \mathbf{f} è la forza che il Sole esercita sul pianeta, e \mathbf{r} è il raggio vettore che dal punto (arbitrario) O porta alla posizione istantanea P del pianeta. Analogamente abbiamo

$$\dot{\mathbf{M}}_\odot = \mathbf{r}_\odot \times \mathbf{f}_\odot, \quad (56)$$

dove \mathbf{f}_\odot è la forza che il pianeta esercita sul Sole, e \mathbf{r}_\odot è il raggio vettore che da O porta alla posizione istantanea S del Sole. Ora, si ha

$$\mathbf{f} = -\mathbf{f}_\odot, \quad (57)$$

e inoltre \mathbf{f} e \mathbf{f}_\odot sono entrambe parallele alla congiungente OS del pianeta col Sole. Quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\text{tot}} &= \mathbf{r} \times \mathbf{f} + \mathbf{r}_\odot \times \mathbf{f}_\odot = \mathbf{r} \times \mathbf{f} - \mathbf{r}_\odot \times \mathbf{f} \\ &= (\mathbf{r} - \mathbf{r}_\odot) \times \mathbf{f} = 0, \end{aligned} \quad (58)$$

perché $\mathbf{r} - \mathbf{r}_\odot$ è parallelo a \mathbf{f} . Ma

$$\dot{\mathbf{M}}_{\text{tot}} = \dot{\mathbf{M}} + \dot{\mathbf{M}}_\odot = \mathbf{L}_{\text{tot}} = 0. \quad (59)$$

Quindi \mathbf{M}_{tot} è costante nel tempo. È da notare che questo ragionamento ha validità generale, perché presuppone solo la validità della terza legge di Newton. Potremo quindi concludere, in generale, che

Il momento angolare totale di un sistema di punti materiali su cui non agiscono forze esterne è costante nel tempo.

Torniamo al nostro problema. Poiché la quantità di moto totale $\mathbf{P} = m\mathbf{v} + m_\odot\mathbf{v}_\odot$ si annulla, \mathbf{v} è parallela a \mathbf{v}_\odot . Poiché \mathbf{M}_{tot} è costante, la velocità di entrambi i corpi giacerà nel piano perpendicolare a \mathbf{M} . Scegliamo questo piano come piano xy , e scegliamo come origine O degli assi il **centro di massa** del sistema dei due corpi, cioè il punto tale che

$$m\mathbf{r} + m_\odot\mathbf{r}_\odot = 0. \quad (60)$$

Dato che $\mathbf{P} = m\dot{\mathbf{r}} + m_\odot\dot{\mathbf{r}}_\odot = 0$, questo punto è fissato una volta per tutte. Indichiamo con \mathbf{R} il vettore $\mathbf{r} - \mathbf{r}_\odot$. Avremo, evidentemente

$$\ddot{\mathbf{R}} = \ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{r}}_\odot = \frac{1}{m}\mathbf{f} - \frac{1}{m_\odot}\mathbf{f}_\odot = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m_\odot}\right)\mathbf{f}. \quad (61)$$

Ma $|\mathbf{R}| = r$, dove r è la distanza fra il pianeta e il Sole. Quindi la distanza relativa \mathbf{R} obbedisce alle leggi del moto di un corpo di massa m_{eff} in un campo gravitazionale di intensità Gmm_\odot/r^2 , che abbiamo calcolato più sopra, con

$$m_{\text{eff}} = \frac{mm_\odot}{m + m_\odot}. \quad (62)$$

Notiamo che, poiché la massa efficace appare negli effetti d'inerzia, ma non nell'intensità della forza, *non è strettamente vero* che pianeti della stessa massa, posti alla stessa distanza dal Sole, si muovono con la stessa accelerazione. Tuttavia, poiché la massa del Sole è molto più grande di quella dei pianeti, la massa efficace è approssimativamente uguale a quella del pianeta, e questa conclusione vale a meno di correzioni di ordine m/m_\odot . Si ha in effetti

$$m_{\text{eff}} = \frac{m}{1 + m/m_\odot} \simeq m \left(1 - \frac{m}{m_\odot}\right). \quad (63)$$

Dato che la massa della Terra è pari approssimativamente a 5.974104^{24} kg, e quella del Sole a 1.98910^{30} kg, il termine correttivo è dell'ordine di 3.010^{-6} per la coppia Terra-Sole. Tuttavia, già per la coppia Giove-Sole sale a 0.95510^{-3} , dato che la massa di Giove è circa pari a 1.89910^{27} kg. Inoltre, nel caso della coppia Luna-Terra, il rapporto delle masse è pari a 1.2310^{-2} .

4.2. Campo gravitazionale dovuto a più corpi

Il campo gravitazionale dubito da un punto materiale nello spazio, e quindi la sua accelerazione, viene a dipendere dalla distribuzione di tutti i corpi nello spazio. Per valutare la forza gravitazionale dovuta a un insieme di corpi, introdurremo il seguente **postulato di linearità**:

La forza gravitazionale subita da un corpo di massa m nello spazio, dovuto all'interazione con più corpi, è pari alla somma vettoriale delle forze dovute a ciascuno di questi corpi.

Quindi, per esempio, un corpo che si trovi fra la Terra e la Luna subirà un'attrazione pari alla somma vettoriale dell'attrazione verso la Terra e quella verso la Luna. La forza risultante punterà piuttosto verso la Terra o verso la Luna a seconda della distanza del corpo da ciascuno dei corpi celesti.

Supponiamo per esempio di valutare la forza risultante agente sul corpo quando esso si sposta lungo la congiungente i centri della Terra e della Luna. Indichiamo con R la distanza Terra-Luna ($384 \cdot 10^6$ m) e con r la distanza del corpo dal centro della Terra. Poniamo il centro della Luna nell'origine O delle coordinate e quello della Terra nel punto P di coordinate $(R, 0, 0)$. Se il corpo si sposta lungo l'asse x , tanto la forza attrattiva della Terra che quella della Luna saranno dirette lungo l'asse x . Indichiamo con x la coordinata del corpo. Allora, per $0 < x < R$ la forza dovuta alla Luna sarà negativa, e varrà $f_L = -GM_L m/x^2$, dove M_L è la massa della Luna. D'altra parte, in queste condizioni, la forza dovuta alla Terra sarà positiva, e varrà $f_\oplus = GM_\oplus m/(R-x)^2$. La forza totale varrà quindi

$$f_{\text{tot}} = f_L + f_\oplus = Gm \left(-\frac{M_L}{x^2} + \frac{M_\oplus}{(R-x)^2} \right). \quad (64)$$

Questa forza si annulla quando x soddisfa l'equazione

$$\frac{x^2/R^2}{1 - 2x/R + (x/R)^2} = \frac{M_L}{M_\oplus}. \quad (65)$$

Poiché il rapporto M_L/M_\oplus è piccolo, anche il rapporto x/R sarà piccolo. A meno di correzioni di ordine superiore, abbiamo

$$\frac{x}{R} \simeq \sqrt{\frac{M_L}{M_\oplus}} = 0.11. \quad (66)$$

Quindi, quando la distanza di un corpo dalla Luna è pari a circa il 10% della distanza Terra-Luna, le forze di attrazione verso i due corpi celesti si bilanciano lungo la congiungente. Bisogna tenere presente che le forze si bilanciano *solo in questo punto*: se il corpo si sposta in una direzione normale alla congiungente, la risultante sarà diversa da zero, e in generale *non* sarà diretta verso il punto in questione. In effetti è possibile mostrare che in un campo gravitazionale non ci sono punti di equilibrio stabile.

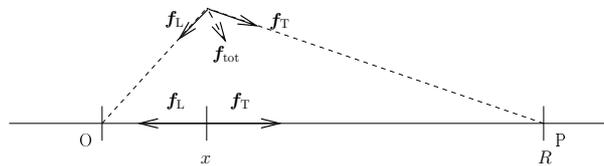


Figura 5. Forza gravitazionale risultante su un corpo posto fra Luna (in O) e Terra (in P).

Da quanto abbiamo detto è chiaro che, a causa della gravitazione universale, il calcolo dei movimenti dei pianeti sarà lungi dall'essere semplice: ad ogni istante, la forza risultante agente su ciascun pianeta non dipenderà solo dalla sua posizione relativa rispetto al Sole, ma anche dalle posizioni di *tutti* gli altri pianeti e satelliti del Sistema Solare. Viceversa lo spostamento di ciascun pianeta avrà influenza sul moto di ciascun altro pianeta o satellite. Si può mostrare che già a partire da tre corpi (per esempio, Sole, Terra e Luna) non è possibile risolvere questo problema in forma analitica.

Tuttavia è possibile valutare approssimativamente, ma con grande precisione e su intervalli di tempo abbastanza lunghi (decine di migliaia di anni) il comportamento del Sistema Solare, a causa dei seguenti fatti:

- Le masse dei pianeti sono comunque molto piccole rispetto a quella del Sole: esse sono quindi fonte di perturbazioni rispetto a un moto di base che è ben descritto dalle leggi di Keplero.
- È possibile valutare gli effetti dell'attrazione dei pianeti descrivendoli come punti materiali, anche a distanze non troppo grandi.

4.3. Campo gravitazionale dovuto a una distribuzione di masse a simmetria sferica

Consideriamo adesso il campo gravitazionale dovuto a una particolare distribuzione di masse. Supponiamo che la massa sia distribuita fra un grandissimo numero di punti materiali, tali che ne possiamo trascurare la natura discreta. Supponiamo che questa distribuzione sia tale che, se valutiamo la massa contenuta in un piccolo parallelepipedo di spigoli paralleli agli assi coordinati, e di lunghezza rispettivamente pari a dx , dy e dz (e quindi di volume $dV = dx dy dz$) posto attorno al punto di raggio vettore $d\mathbf{r}$, essa sia proporzionale a V :

$$dm = \rho(\mathbf{r}) dV = \rho(\mathbf{r}) dx dy dz. \quad (67)$$

La funzione $\rho(\mathbf{r})$ è chiamata la **densità di massa**, e sarà in generale una funzione della posizione, rappresentata dal raggio vettore \mathbf{r} .

Per valutare il campo gravitazionale dovuto a una distribuzione di massa definita da una data funzione $\rho(\mathbf{r})$ di densità di massa, possiamo supporre di suddividere la regione in cui si distribuisce la massa in tante piccole regioni di volume dV e di dimensioni piccole rispetto alla distanza dal punto in cui vogliamo valutare la forza risultante, valutare, per ciascuna regione, la forza di attrazione corrispondente, e finalmente sommare i contributi di ciascuna regione.

Come esercizio di riscaldamento, immaginiamo di avere una distribuzione concentrata su una circonferenza di raggio R , e tale che la massa contenuta in un tratto di lunghezza ℓ di questa circonferenza sia pari a $\mu\ell$. Quindi la massa totale contenuta in questa circonferenza sarà pari a $M = 2\pi R\mu$ (cf. fig. 6). Vogliamo valutare il campo gravitazionale che questa distribuzione di massa

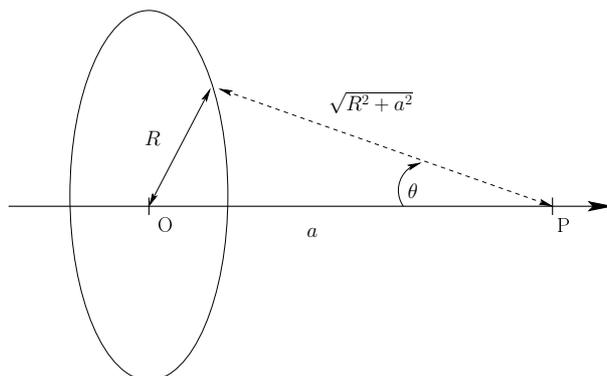


Figura 6. Attrazione dovuta a una distribuzione circolare di massa rispetto a un punto posto sul suo asse.

produce su un corpo (di massa unitaria) posto lungo l'asse della circonferenza, e a una distanza a dal piano della circonferenza stessa. Il problema è simmetrico rispetto a rotazioni attorno a questo asse, e quindi la forza risultante dalla distribuzione di massa dovrà necessariamente essere diretta lungo questo asse. Ci possiamo quindi limitare a valutare la componente della forza risultante lungo questo asse. Consideriamo l'attrazione esercitata da un piccolo elemento di massa, di lunghezza $d\ell = R d\phi$, dove $d\phi$ è il piccolo angolo (misurato in radianti) che questo elemento sottende rispetto al centro della circonferenza. Questo elemento di massa produce un'attrazione di intensità $df = Gdm/r^2 = G\mu R d\phi / (R^2 + a^2)$. Questa attrazione è diretta verso l'elemento di massa in questione, a un angolo θ rispetto all'asse, dove θ è determinato da

$$\cos \theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2}}. \quad (68)$$

Evidentemente il contributo della forza in questione alla componente della risultante lungo l'asse è pari a

$$df \cos \theta = G \frac{\mu R^2 d\phi}{(R^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (69)$$

Integrando su tutta la circonferenza, e tenendo presente che $2\pi\mu R = M$, otteniamo il valore della forza lungo l'asse:

$$f = G \frac{MR}{(R^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (70)$$

Consideriamo ora una distribuzione di massa a **simmetria sferica**, in cui cioè la densità di massa $\rho(\mathbf{r})$ dipende solo dalla distanza da un punto O detto centro della distribuzione. Scegliendo questo punto come origine degli assi coordinati, questa distanza è pari al modulo r del raggio vettore \mathbf{r} .

Un caso particolare di distribuzione a simmetria sferica si ha quando la massa è concentrata in un sottile guscio sferico di raggio R_0 e di spessore dR (cf. fig. 7). In questo caso si ha

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} \rho, & \text{se } R_0 \leq r \leq R_0 + dR; \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (71)$$

In questa espressione ρ è una costante, e la massa totale contenuta nel guscio sferico è pari a $dM = 4\pi\rho R_0^2 dR$, che supporremo infinitesima. Valutiamo adesso la forza totale con cui questa

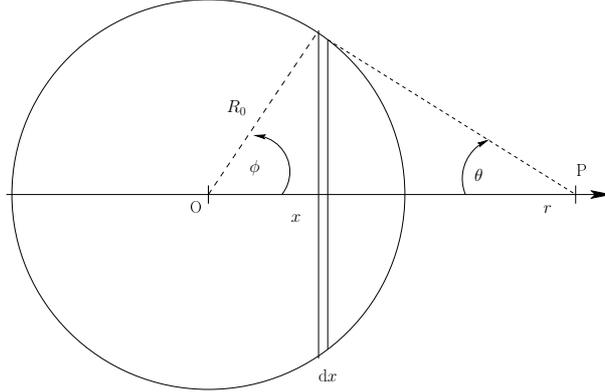


Figura 7. Attrazione esercitata da una distribuzione di massa uniforme su una buccia sferica

distribuzione di massa attrae un corpo di massa unitaria posto in un punto P a distanza r dal centro O. Per valutare questa quantità, facciamo coincidere l'asse delle x con la retta che congiunge O a P. Immaginiamo quindi di suddividere il guscio sferico in sottili bucce circolari il cui centro si trova sull'asse x , nel punto di coordinata x . Indichiamo con dx la lunghezza della proiezione della buccia sull'asse x . La lunghezza della buccia vale $2\pi R$, dove il raggio R della buccia è pari a $R = \sqrt{R_0^2 - x^2}$. La larghezza della buccia è pari a $dx/\sin\phi$, dove ϕ è l'angolo che il raggio vettore di qualunque punto della buccia fa con l'asse delle x . Si ha $\sin\phi = R/R_0$, per cui la larghezza della buccia è data da $R_0 dx/R$. Quindi ciascuna buccia ha un'area totale pari a $2\pi R R_0 dx/R = 2\pi R_0 dx$. Il suo volume è pari a $2\pi R_0 dx dR$ e quindi la sua massa è pari a $2\pi\rho R_0 dx dR$, dove ρ è la densità di massa. D'altra parte, possiamo assimilare ciascuna buccia a una circonferenza di raggio R , posta nel piano $x = \text{cost}$. Possiamo quindi utilizzare il risultato che abbiamo ottenuto più sopra, per cui la forza con cui questa buccia attrae un punto posto sull'asse x nel punto di coordinate $(r, 0, 0)$ vale come previsto dalla (70) con $R = \sqrt{R_0^2 - r^2}$ e $a = r - x$. Si ha così

$$\begin{aligned} df(\phi) &= -G \frac{2\pi\rho R_0 dx dR (r-x)}{(R_0^2 - x^2 + (r-x)^2)^{3/2}} \\ &= -G \frac{2\pi\rho R_0 dx dR (r-x)}{(R_0^2 - 2rx + r^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (72)$$

Possiamo allora valutare la forza totale semplicemente integrando su x da $-R_0$ a R_0 , ottenendo

$$f = -A \int_{-R_0}^{R_0} \frac{dx (r-x)}{(R_0^2 - 2rx + r^2)^{3/2}}. \quad (73)$$

Abbiamo introdotto la costante $A = 2\pi G\rho R_0 dR$. L'integrale può essere valutato come segue. Poniamo $y = r - x$. Si ha allora

$$\begin{aligned} I &= - \int_{-R_0}^{+R_0} \frac{dx (r-x)}{(R_0^2 - 2rx + r^2)^{3/2}} = \int_{R_0+r}^{r-R_0} \frac{dy y}{(R_0^2 - r^2 + 2ry)^{3/2}} \\ &= -\frac{1}{r} \left[\frac{y}{(R_0^2 - r^2 + 2ry)^{1/2}} \right]_{R_0+r}^{r-R_0} + \frac{1}{r} \int_{R_0+r}^{r-R_0} \frac{dy}{(R_0^2 - r^2 + 2ry)^{1/2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{r} \left[\frac{r - R_0}{\sqrt{R_0^2 + r^2 - 2rR_0}} - \frac{r + R_0}{\sqrt{R_0^2 + r^2 + 2rR_0}} \right] \\
&\quad + \frac{1}{r^2} \left[(R_0^2 - r^2 + 2ry)^{1/2} \right]_{r+R_0}^{r-R_0} \\
&= -\frac{1}{r} \left[\frac{r - R_0}{|r - R_0|} - \frac{r + R_0}{|r + R_0|} \right] + \frac{1}{r^2} [|r - R_0| - |r + R_0|]. \tag{74}
\end{aligned}$$

Dobbiamo distinguere due casi.

- a) Supponiamo $|r| < R_0$, cioè che il corpo rispetto a cui stiamo valutando l'attrazione si trovi *all'interno* del guscio sferico. Si ha allora $(r - R_0) < 0$, e quindi

$$I = -\frac{1}{r}[-1 - 1] + \frac{1}{r^2}[-r + R_0 - r - R_0] = 0. \tag{75}$$

Quindi abbiamo ottenuto un importante risultato dovuto a Newton, e noto come **primo teorema del guscio**:

La risultante delle forze di attrazione esercitate da una distribuzione di massa uniforme su un guscio sferico su un punto posto al suo interno è nulla.

- b) Supponiamo che $|r| > R_0$, cioè che il corpo si trovi all'esterno del guscio. Per fissare le idee, supponiamo $r > 0$. Otteniamo allora

$$I = -\frac{1}{r}[-1 + 1] + \frac{1}{r^2}[r - R_0 - r - R_0] = -\frac{2R_0}{r^2}. \tag{76}$$

Quindi

$$f = -\frac{2AR_0}{r^2} = -G \frac{4\pi R_0^2 \rho dR}{r^2} = -G \frac{dM}{r^2}, \tag{77}$$

dove dM è la massa contenuta nel guscio sferico. Otteniamo così il **secondo teorema del guscio**:

La risultante delle forze di attrazione esercitate da una distribuzione di massa uniforme su un guscio sferico su un punto esterno ad esso è uguale a quella che sarebbe esercitata se tutta la sua massa fosse posta nel suo centro.

Possiamo allora facilmente discutere gli effetti di una distribuzione di massa a simmetria sferica. Supponiamo di dividere la regione in cui è distribuita la massa in tanti gusci sferici, e per ciascuno di essi applichiamo l'appropriato teorema del guscio: il primo teorema, se il punto che stiamo considerando si trova all'interno del guscio, o il secondo teorema se si trova all'esterno. La forza che si ottiene dipenderà solo dalla massa cui si applica il secondo teorema: in altri termini, la forza di attrazione sarà uguale a quella che si avrebbe se tutta la massa che si trova a distanza dal centro inferiore a quella del punto venisse concentrata nel centro.

Questo in particolare giustifica l'ipotesi fatta da Newton nel trattare la forza peso come se tutta la massa della Terra fosse concentrata nel suo centro.