Appunti di geometria

L. P.

17 Febbraio 2008

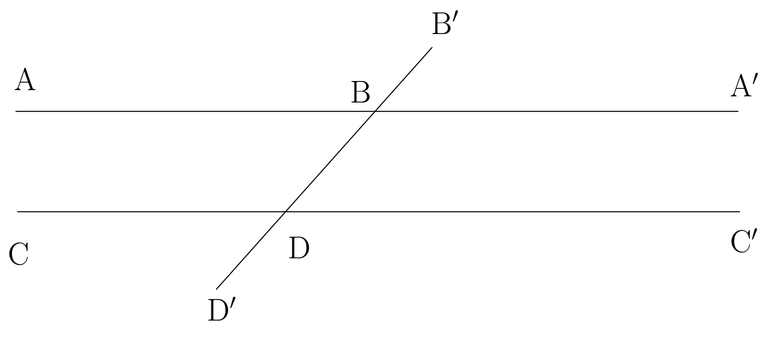
Notazione

I *punti* sono rappresentati da lettere maiuscole: A, B, C, ecc.; $\overline{\mathrm{AB}}$ rappresenta la *lunghezza* del segmento AB, $\angle\mathrm{ABC}$ rappresenta l'*ampiezza* dell'angolo compreso fra le semirette AB e BC (la notazione è ambigua: salvo eccezioni si considera l'angolo *convesso o piatto*). Le ampiezze degli angoli sono rappresentati anche da lettere greche: α, $\beta\ldots$ L'ampiezza dell'angolo piatto è rappresentata da π. L'area del triangolo di vertici ABC è rappresentata da $\triangle\mathrm{ABC}$. Quando sia possibile, i vertici del triangolo sono sottintesi.

1 Sugli angoli

Definizione. *Due angoli sono detti* supplementari *se la loro somma è pari a un angolo piatto, e sono detti* complementari *se la loro somma è pari a un angolo retto.*

Definizione. *Date due rette parallele* $\mathrm{ABA'}$ *e* $\mathrm{CDC'}$ *e la retta trasversa* $\mathrm{B'BDD'}$, *gli angoli* $\angle\mathrm{ABD}$ *e* $\angle\mathrm{CDB}$ *sono detti* coniugati interni, *gli angoli* $\angle\mathrm{ABB'}$ *e* $\angle\mathrm{CDD'}$ coniugati esterni, *gli angoli* $\angle\mathrm{ABB'}$ *e* $\angle\mathrm{C'DB}$ corrispondenti, *gli angoli* $\angle\mathrm{ABB'}$ *e* $\angle\mathrm{D'DB}$ alterni esterni, *gli angoli* $\angle\mathrm{ABD}$ *e* $\angle\mathrm{C'DB}$ alterni interni.



Teorema. *Date due rette parallele e una retta a loro trasversa:*

1. *Gli angoli coniugati sono fra loro supplementari;*

2. *Angoli alterni o corrispondenti sono fra loro congruenti.*

Dimostrazione. 1. Consideriamo gli angoli coniugati interni. Se essi non sono supplementari, per il V postulato le due rette si incontrano, e quindi non sono parallele. Dato che gli angoli coniugati esterni sono pari a un angolo giro meno gli angoli coniugati interni, lo stesso è vero per gli angoli coniugati esterni.

2. Dati due angoli alterni interni, uno di essi è il supplementare dell'angolo coniugato interno all'altro. Quindi per il risultato appena mostrato essi sono uguali. Lo stesso ragionamento si applica agli angoli alterni esterni, sfruttando gli angoli coniugati esterni. Dati due angoli corrispondenti, uno di essi è il supplementare dell'angolo coniugato interno dell'altro, e si applica lo stesso ragionamento.

■

Definizione. *Date due rette,* AA' *e* BB'*, che si incontrano nel punto* O*, gli angoli* $\angle\mathrm{AOB}$ *e* $\angle\mathrm{A'OB'}$ *(così come gli angoli* $\angle\mathrm{AOB'}$ *e* $\angle\mathrm{A'OB}$*) sono detti* opposti al vertice*.*

Angoli opposti al vertice. *Angoli opposti al vertice sono uguali.*

Dimostrazione. In effetti, p.es., gli angoli $\angle\mathrm{AOB}$ e $\angle\mathrm{BOA'}$ sono supplementari, così come gli angoli $\angle\mathrm{BOA'}$ e $\angle\mathrm{A'OB'}$. Quindi gli angoli $\angle\mathrm{AOB}$ e $\angle\mathrm{A'OB'}$ sono uguali perché supplementari dello stesso angolo. ■

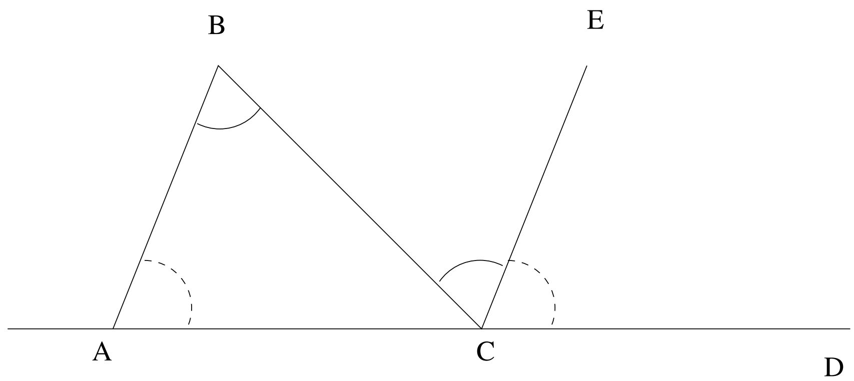
2 Criteri di congruenza dei triangoli

Diremo che due triangoli ABC e DEF sono congruenti se i vertici possono essere messi in corrispondenza biunivoca, tali che le lunghezze dei lati corrispondenti e le ampiezze degli angoli corrispondenti sono uguali. Notiamo che i lati e gli angoli di un triangolo sono sei grandezze, ma che le tre ampiezze degli angoli non sono indipendenti. Infatti, indicando con α l'angolo di vertice A, con β l'angolo di vertice B e con γ l'angolo di vertice C, si ha

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi,$$

dove π è l'angolo piatto (180°).

Somma degli angoli interni di un triangolo. *La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale ad un angolo piatto.*



Dimostrazione. Dato il triangolo ABC, si prolunghi il lato AC verso D, e si tracci da C la parallela CE al lato AB. Gli angoli $\angle$BAC e $\angle$ECD sono uguali perché angoli corrispondenti fra le rette parallele AB e CE rispetto alla trasversale AC; gli angoli $\angle$ABC e $\angle$BCE sono uguali perché angoli alterni interni fra le rette parallele AB e CE e la trasversale BC. Quindi l'angolo piatto $\angle$ACD, che è somma degli angoli $\angle$ACB, $\angle$BCE e $\angle$ECD, è uguale alla somma degli angoli $\angle$ACB, $\angle$ABC e $\angle$BAC. ■

In realtà, tutti gli elementi di un triangolo possono essere determinati quando siano noti:

1. Due lati e l'angolo fra essi compreso (**1° criterio**);
2. Due angoli e il lato fra essi compreso (**2° criterio**);
3. I tre lati (**3° criterio**).

1° criterio. *Dati due triangoli,* ABC *e* DEF, *se si ha* $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{DE}}$, *e* $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{DF}}$, *ed inoltre* $\angle$BAC = $\angle$EDF, *i due triangoli sono congruenti.*

Commento. Hilbert ha fatto notare che è possibile definire la lunghezza di un segmento in modo che tutti i postulati di Euclide siano soddisfatti, ma il 1° criterio non sia valido. Di conseguenza *il 1° criterio deve essere considerato come un postulato addizionale*. Questo può essere visto nella maniera seguente, Consideriamo la geometria piana definita sulle coppie (x, y) di numeri reali, e definiamo lunghezza del segmento AB, dove $\mathrm{A} = (x_1, y_1)$ e $\mathrm{B} = (x_2, y_2)$, la quantità

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(x_1 - x_2 + y_1 - y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Conveniamo che due segmenti sono congruenti se hanno la stessa lunghezza. Notare che con questa definizione, dati due segmenti AB e BC (il cui solo punto comune è B) sulla stessa retta, si ha $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{BC}}$. Per mostrarlo, supponiamo che la retta in questione abbia per equazione $y = ax + b$. Allora $y_3 - y_1 = (y_3 - y_2) + (y_2 - y_1) = a\,[(x_3 - x_2) + (x_2 - x_1)]$. Quindi $\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{(1+a)^2 + a^2}|x_3 - x_1| = \sqrt{(1+a)^2 + a^2}\,(|x_3 - x_2| + |x_2 - x_1|) = \overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{BC}}$. D'altra parte, in questa geometria, il 1° criterio non è soddisfatto. Consideriamo i quattro punti: O di coordinate $(0, 0)$, A di coordinate $(1, 0)$, B di coordinate $(-1, 0)$, C di coordinate $(0, 1)$. Allora $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{OC}}$ e gli angoli $\angle$AOC e $\angle$BOC sono congruenti perché rettangoli. Però i triangoli OAC e OBC non sono congruenti, perché le lunghezze dei segmenti AC e BC valgono rispettivamente 1 e $\sqrt{5}$.

2° criterio. *Dati due triangoli,* ABC *e* DEF, *se si ha* $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{DE}}$, *ed inoltre* $\angle$BAC = $\angle$EDF *e* $\angle$ABC = $\angle$DEF, *i due triangoli sono congruenti.*

Dimostrazione. Supponiamo che ciò non sia vero, e, per esempio, che $\overline{\mathrm{AC}} > \overline{\mathrm{DF}}$. Entro AC, individuiamo il punto G tale che $\overline{\mathrm{AG}} = \overline{\mathrm{DF}}$. Per il primo criterio, il triangolo ABG è congruente al triangolo DEF. Quindi, in particolare, l'angolo $\angle$GBA è uguale all'angolo $\angle$FED. Ma l'angolo $\angle$CBA, che è uguale all'angolo $\angle$GBA più l'angolo $\angle$CBG, è uguale all'angolo $\angle$FED per ipotesi. Quindi si ha che un angolo è uguale a sé stesso più un altro angolo, il che non può essere vero. ■

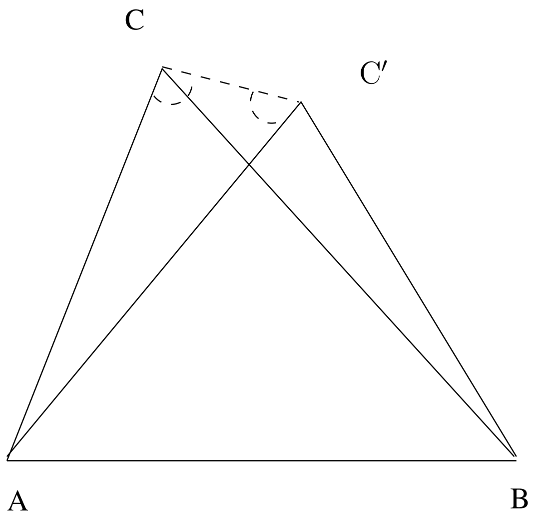
Definizione. *Si dice che due punti,* C *e* C′, giacciono dalla stessa parte *della retta* AB *se la retta che congiunge* C *con* C′ *non interseca la retta* AB *in un punto interno al segmento* CC′.

Definizione. *Un triangolo è detto* isoscele *se possiede due lati fra loro congruenti. Il terzo lato è detto* base *del triangolo.*

Lemma. *In un triangolo isoscele, gli angoli alla base sono congruenti.*

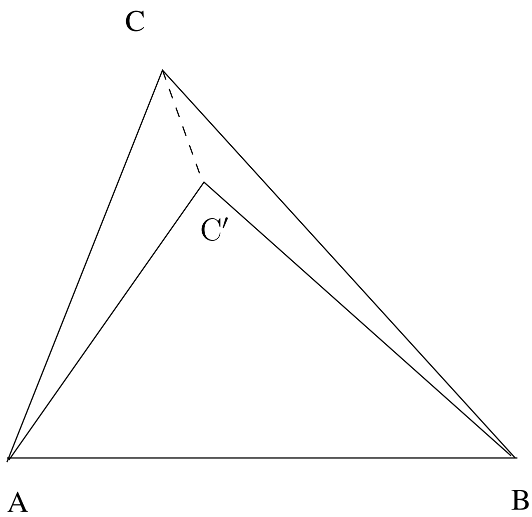
Dimostrazione. Sia dato il triangolo ABC, e si supponga $\overline{AB} = \overline{AC}$. Quindi BC è la base di un triangolo isoscele. Si considerino i triangoli ABC e $A'B'C' = ACB$. Essi sono congruenti per il primo criterio, avendo uguali gli angoli in A, e uguali due a due i lati rispettivi (cioè AB con $A'B' = AC$ ecc.). Quindi gli angoli corrispondenti $\angle ABC$ e $\angle ACB$ sono congruenti. ■

Lemma. *Dato un segmento* AB, *si considerino i punti* C *e* C′ *tali che* AC *è congruente ad* AC′ *e* BC *è congruente a* BC′, *e* C *e* C′ *giacciono dalla stessa parte della retta* AB. *Allora* C *e* C′ *coincidono.*



Dimostrazione. Si supponga che ciò non sia vero, e che, p.es., C′ si trovi all'esterno del triangolo ABC. Si tracci il segmento CC′. I triangoli ACC′ e BCC′ sono isosceli, e quindi si ha rispettivamente $\angle ACC' = \angle AC'C$ e $\angle BCC' = \angle BC'C$. D'altra parte si ha $\angle BC'C = \angle AC'C + \angle AC'B$, mentre $\angle ACC' = \angle ACB + \angle BCC'$. Quindi $\angle BC'C = \angle ACB + \angle BCC' + \angle AC'B > \angle BC'C$, da cui la contraddizione.

Se, p.es., C′ è interno al triangolo ABC, si ha ancora $\angle ACC' = \angle AC'C$ e $\angle BCC' = \angle BC'C$. D'altra parte, si ha $\angle ACB = \angle ACC' + \angle C'CB$, mentre $\angle AC'B = 2\pi - (\angle AC'C + \angle BC'C) = 2\pi - \angle ACB$. Ma $\angle ACB < \pi$, e quindi si avrebbe $\angle AC'B > \pi$, che è in contraddizione col fatto che la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a π. ■

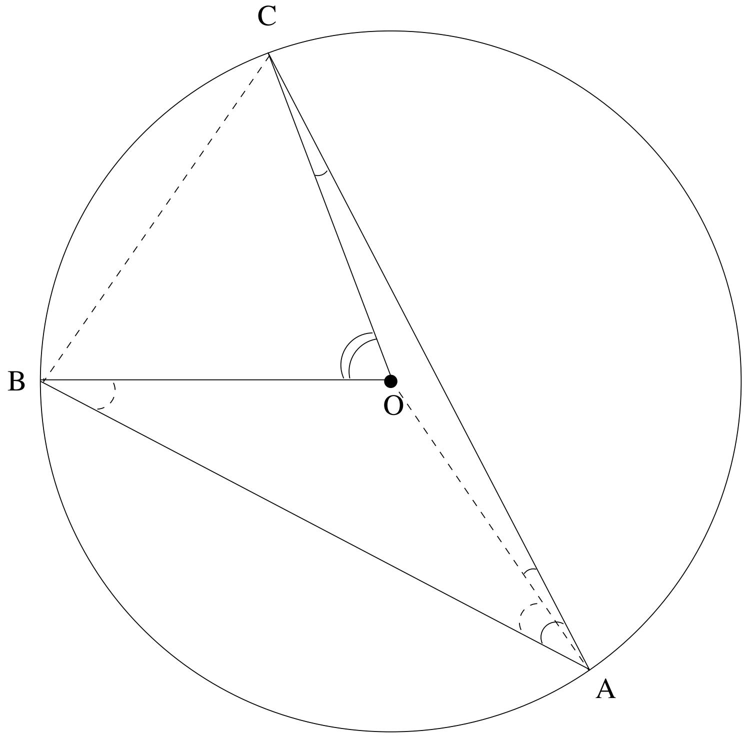


3° criterio. *Se in due triangoli i lati sono rispettivamente congruenti due a due, i triangoli sono congruenti.*

Dimostrazione. Dato il triangolo ABC e il triangolo A′B′C′, si supponga $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, ecc. Dato il triangolo ABC, costruiamo il punto C″ tale che $\angle C''AB = \angle C'A'B'$ e $\overline{AC''} = \overline{A'C'}$. Il triangolo ABC″ è congruente al triangolo A′B′C′ per il primo criterio. Quindi $\overline{BC''} = \overline{B'C'} = \overline{BC}$. Ma allora C e C″ coincidono per il lemma appena dimostrato, e i triangoli ABC e A′B′C′ sono congruenti. ■

3 Angoli al centro e angoli alla circonferenza

Teorema. *L'angolo al centro* $\angle BOC$ *che sottende una corda* BC *è uguale al doppio del corrispondente angolo alla circonferenza* $\angle BAC$*.*



Dimostrazione. Supponiamo che il centro O si trovi all'interno del triangolo ABC. Si tracci il raggio OA. I triangoli AOB e AOC sono isosceli, quindi si ha rispettivamente $\angle BAO = \angle AOB$ e $\angle CAO = \angle AOC$. D'altra parte, si ha $\angle BAC = \angle BAO + \angle CAO$, $\angle ABC = \angle ABO + \angle OBC$ e $\angle ACB = \angle ACO + \angle OCB$. Considerando il triangolo OBC otteniamo così

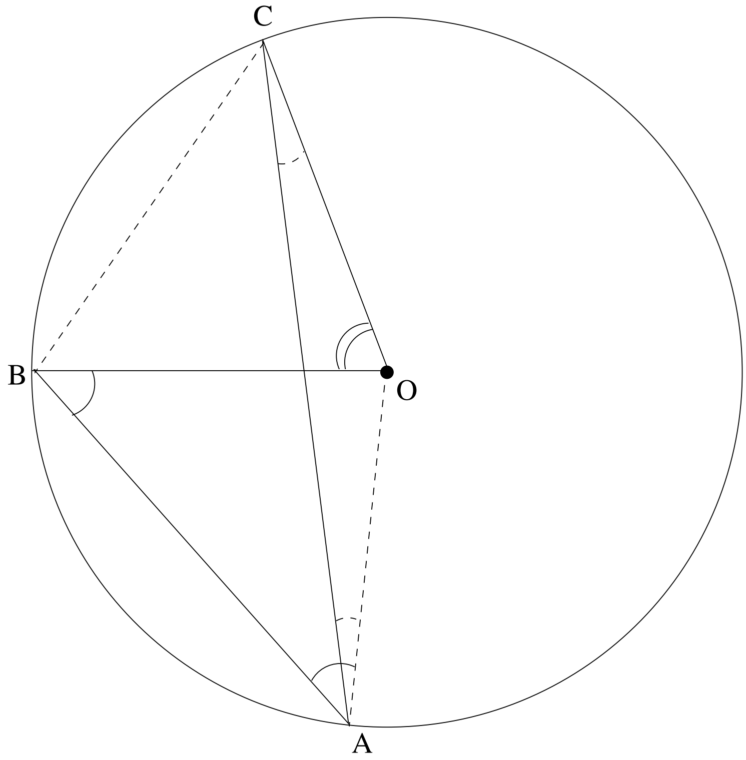
$$\angle BOC = \pi - (\angle OBC + \angle OCB)\,.$$

Considerando il triangolo ABC otteniamo

$$\begin{aligned}\angle BAC &= \pi - (\angle ABC + \angle ACB) = \pi - (\angle BAC + \angle OBC + \angle OCB)\\ &= \angle BOC - \angle BAC.\end{aligned}$$

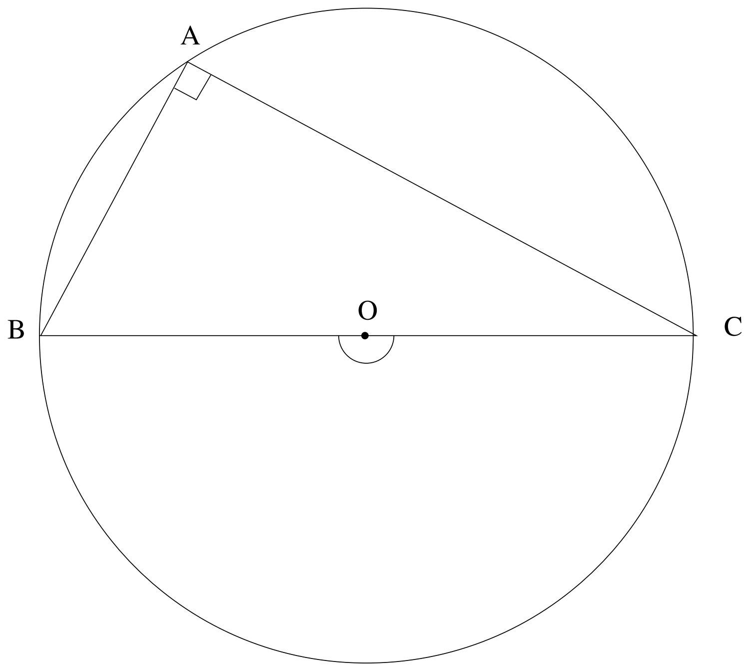
Quindi

$$\angle BOC = 2\,\angle BAC.$$

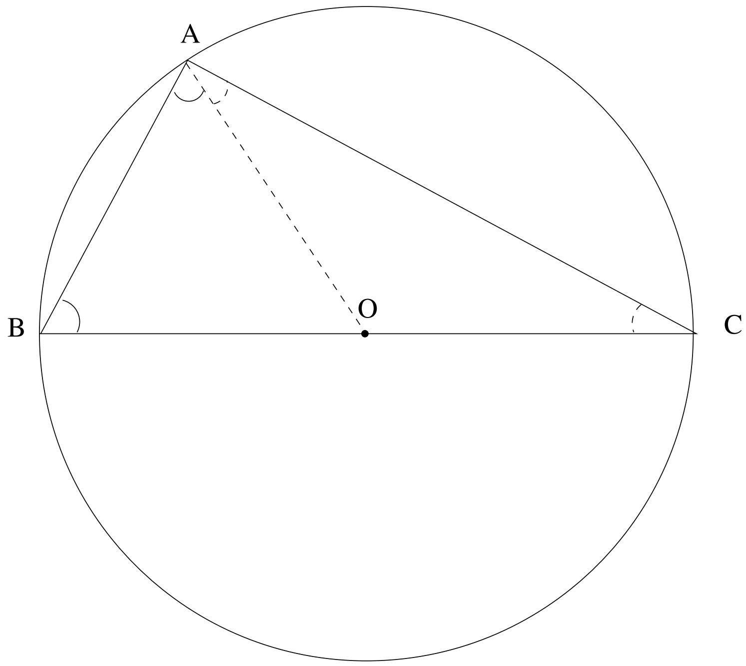


Se O si trova all'esterno dell'angolo ABC, la dimostrazione è la stessa, considerando negativi gli angoli all'esterno del triangolo ABC (come, p.es., gli angoli $\angle$OAC e $\angle$ACO in figura). ■

Corollario. *Un triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo.*



Dimostrazione. Dato il triangolo ABC, inscritto nella circonferenza di centro O, di cui BC è un rettangolo, si supponga che il lato BC passi per O. Quindi l'angolo al centro su cui insiste la corda BC è piatto. Quindi il corrispondente angolo alla circonferenza, che è l'angolo $\angle$BAC, è pari alla metà di un angolo piatto, e quindi è retto. ■



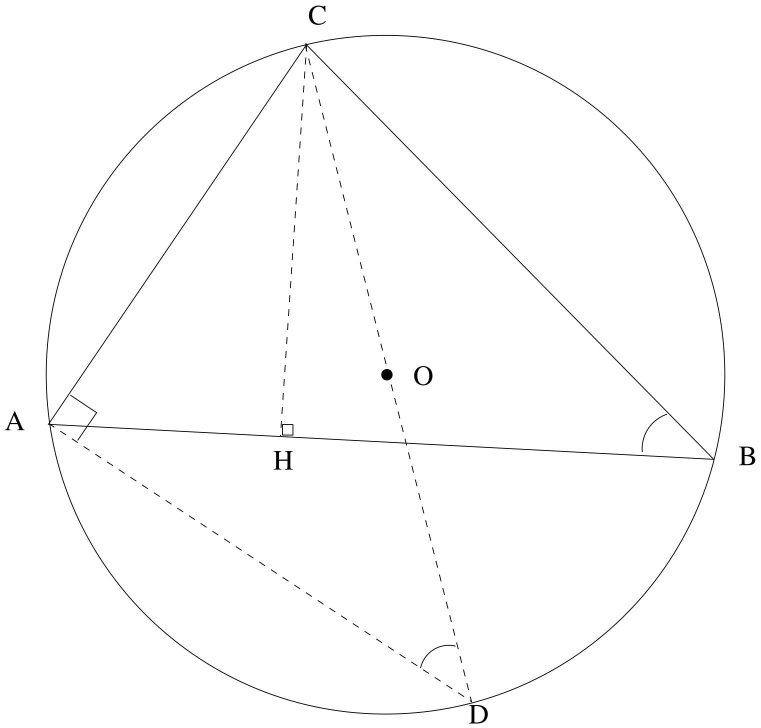
Dimostrazione diretta. Si tracci il raggio OA. Il triangolo BOA è isoscele in O, e quindi si ha $\angle\mathrm{OBA} = \angle\mathrm{OAB}$ e $\angle\mathrm{AOB} = \pi - 2\,\angle\mathrm{OBA}$. D'altra parte, il triangolo COA è isoscele in O, e quindi si ha $\angle\mathrm{OCA} = \angle\mathrm{OAC}$ e $\angle\mathrm{AOC} = \pi - 2\,\angle\mathrm{OCA}$. Quindi $\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{BAO} + \angle\mathrm{CAO} = (\pi - \angle\mathrm{AOB} + \pi - \angle\mathrm{AOC})/2 = \pi/2$. ■

4 Raggio della circonferenza circoscritta a un triangolo

Teorema. *Il triangolo* ABC *è inscritto nella circonferenza di centro* O. *Dimostrare che il raggio R della circonferenza circoscritta è pari a*

$$R = \frac{abc}{4\triangle},$$

dove a, b e c sono le lunghezze dei tre lati e $\triangle$ è l'area del triangolo.



Dimostrazione. Si tracci il diametro CD e la perpendicolare CH al lato AB. Il triangolo CAD è rettangolo perché inscritto in un semicerchio. D'altra parte gli angoli$\angle$ADC e in $\angle$HBC sono uguali perché insistono sulla stessa corda AC. Quindi i triangoli CAD e BHC sono simili. Indicando con h la lunghezza del segmento CH, con a quella del lato BC, ecc., si ha allora

$$2R : b = a : h.$$

D'altra parte si ha

$$\triangle = \frac{1}{2}ch.$$

Quindi

$$h = \frac{2\triangle}{c}.$$

Otteniamo così

$$2R = \frac{ab}{h} = \frac{abc}{2\triangle}.$$

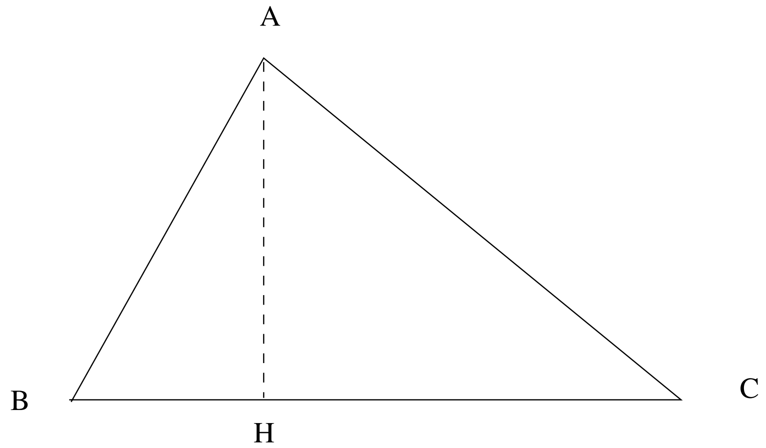
Quindi

$$R = \frac{abc}{4\triangle}.$$

■

5 Teoremi d'Euclide e di Pitagora

1° Teorema di Euclide. *In un triangolo rettangolo, ciascun cateto è medio proporzionale fra l'ipotenusa e la sua proiezione sull'ipotenusa.*



Dimostrazione. Dato il triangolo ABC, rettangolo in A, si tracci l'altezza AH relativa all'ipotenusa. I triangoli ABC e HBA sono simili, perché sono entrambi rettangoli, e in entrambi è uguale l'angolo in B. Quindi i lati corrispondenti sono proporzionali. Si ha così $\overline{BC} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{BH}$. ■

Corollario. *Il quadrato costruito su di un cateto è equivalente al rettangolo costruito dall'ipotenusa e dalla proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa.*

Dimostrazione. Si ha in effetti, per il 1° teorema di Euclide, $\overline{AC}^2 = \overline{BH}\,\overline{BC}$. ■

Teorema di Pitagora. *In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.*

Dimostrazione. Dato il triangolo rettangolo ABC, rettangolo in A, si tracci l'altezza AH relativa all'ipotenusa. Per il corollario del 1° teorema d'Euclide, si ha

$$\overline{AB}^2 = \overline{BH}\,\overline{BC}; \qquad \overline{AC}^2 = \overline{HC}\,\overline{BC}.$$

Quindi $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BH}\,\overline{BC} + \overline{HC}\,\overline{BC} = \overline{BC}^2$. ■

2° teorema di Euclide. *In un triangolo rettangolo, l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale fra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.*

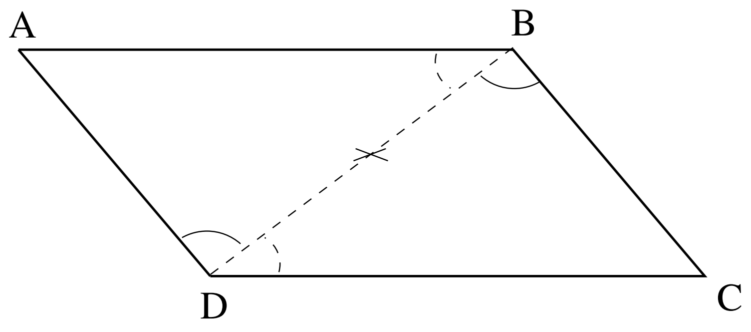
Dimostrazione. Dato il triangolo ABC, rettangolo in A, si tracci l'altezza AH relativa all'ipotenusa. I triangoli AHB e AHC, entrambi rettangoli in H, sono simili al triangolo ABC. Quindi i lati corrispondenti sono proporzionali. Si ha così $\overline{HC} : \overline{AH} = \overline{AH} : \overline{BH}$. ■

Corollario. *Il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo costruito sulle proiezioni dei cateti.*

Dimostrazione. Si ha in effetti, per il 2° teorema d'Euclide, $\overline{AH}^2 = \overline{BH}\,\overline{HC}$. ■

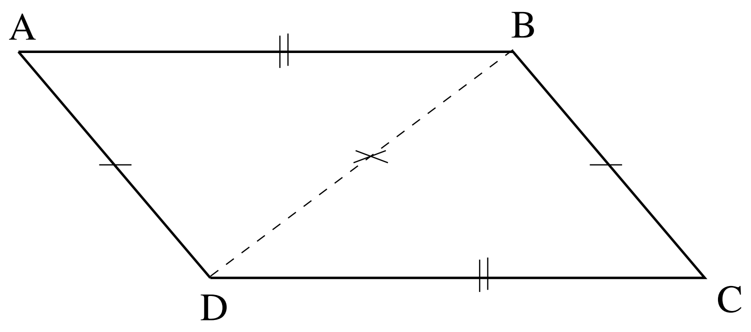
6 Quadrilatero e parallelogramma

Teorema. *In un parallelogramma i lati opposti sono uguali due a due.*



Dimostrazione. Dato il parallelogramma ABCD, ∠ABD è uguale all'angolo ∠BDC perché sono alterni interni rispetto alla coppia di parallele AB e DC e alla trasversale BD. Analogamente gli angoli ∠ADB e ∠DBC sono uguali perché alterni interni rispetto alle parallele AD e BC e alla trasversale DB. Quindi i triangoli ADB e CBD sono uguali per il secondo criterio, avendo il lato BD in comune, e gli angoli adiacenti in B e in D uguali. Ma allora AB è uguale a CD e AD è uguale a CB. ∎

Teorema. *Un quadrilatero i cui lati opposti sono uguali due a due è un parallelogramma.*

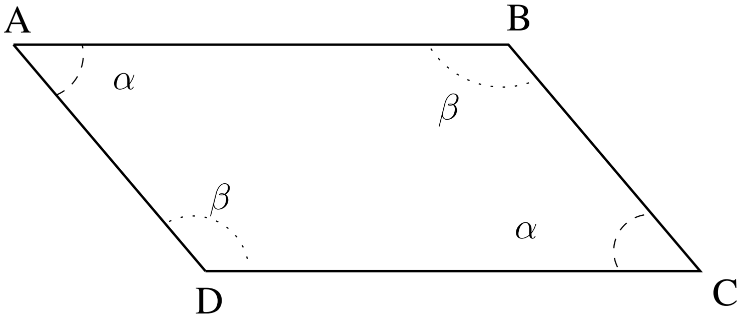


Dimostrazione. Dato il quadrilatero ABCD, in cui, per ipotesi $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{BC} = \overline{AD}$, consideriamo i due triangoli ABD e CDB. Essi hanno il lato DB in comune, e gli altri due lati sono uguali due a due per ipotesi. Essi sono quindi uguali per il terzo criterio. In particolare, quindi l'angolo ∠BDC è uguale all'angolo ∠ABD. Ma questi angoli sono alterni interni rispetto alla coppia di rette AB e CD e alla trasversale DB. Quindi AB è parallela a CD. Analogamente si mostra che AD è parallela a CB. Quindi i lati opposti sono paralleli due a due. ∎

Teorema. *In un parallelogramma, gli angoli opposti sono uguali due a due.*

Dimostrazione. Dato il parallelogramma ABCD, tracciamo la diagonale BD. I triangoli ABD e BDC sono uguali per il terzo criterio, poiché hanno il lato BD in comune, i lati AB e CD da una parte e AD e BC dall'altra sono uguali per il teorema appena dimostrato. Quindi gli angoli in A e in C sono uguali. Allo stesso modo si dimostra che gli angoli in B e in D sono uguali. ∎

Teorema. *Un quadrilatero i cui angoli opposti sono uguali due a due è un parallelogramma.*



Dimostrazione. Sia dato il quadrilatero ABCD, e sia l'angolo $\angle$DAB uguale all'angolo in $\angle$BCD (denotato α), mentre l'angolo $\angle$ABC è uguale all'angolo in $\angle$CDA (denotato β). Vogliamo mostrare che il quadrilatero ABCD è un parallelogramma, cioè che AB è parallelo a DC, e analogamente che AD è parallelo a BC.

Sappiamo che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è uguale a due angoli piatti. Indicando con π l'angolo piatto abbiamo quindi

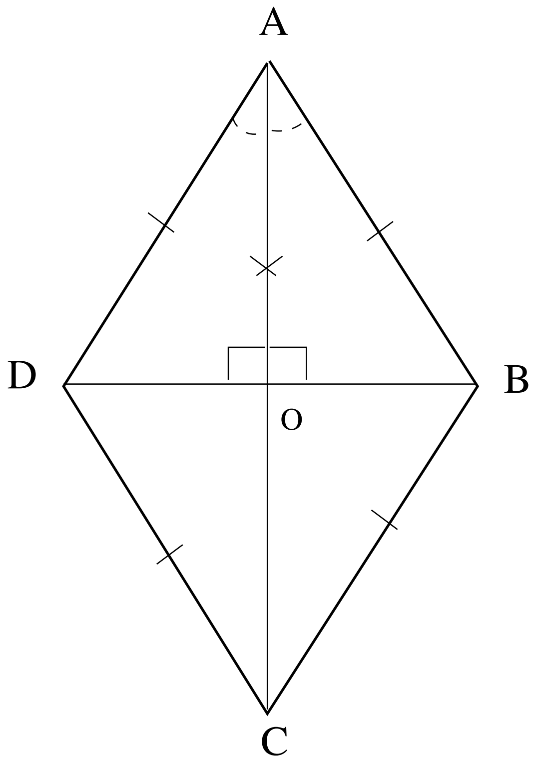
$$2\alpha + 2\beta = 2\pi.$$

Si ha quindi

$$\beta = \pi - \alpha.$$

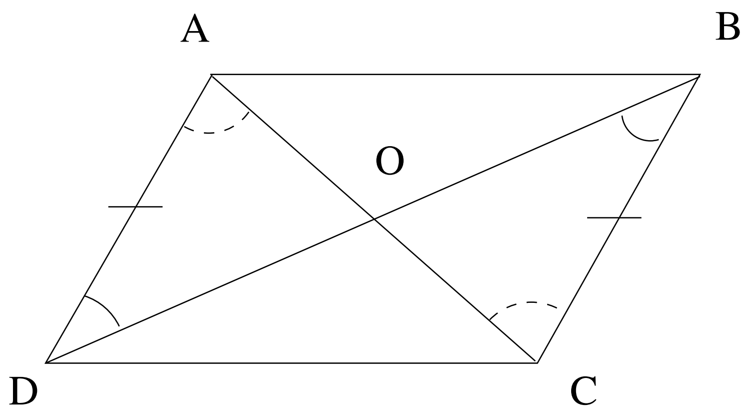
Quindi gli angoli α e β sono supplementari. Ora gli angoli $\angle$DAB e $\angle$CDA sono coniugati rispetto alla coppia di rette AB, e CD, e alla trasversale AD. Quindi AB e CD sono paralleli. Analogamente si mostra che AD e BC sono paralleli. ■

Teorema. *In un rombo, le diagonali sono perpendicolari fra loro.*



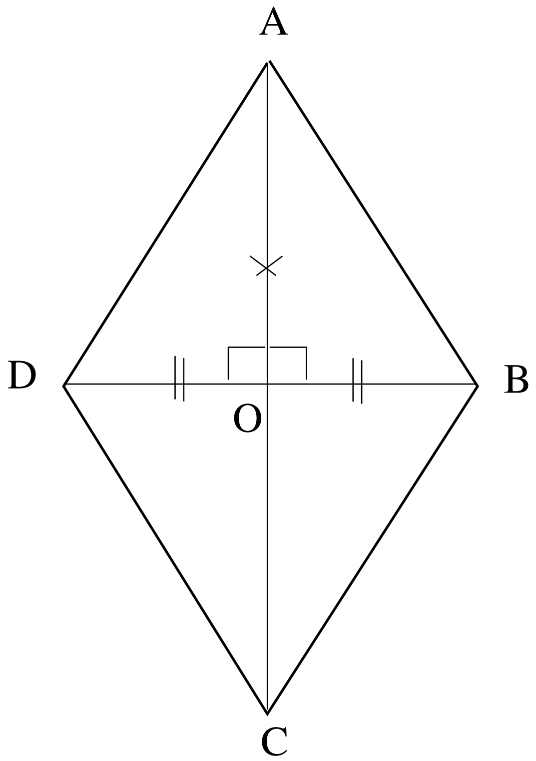
Dimostrazione. Consideriamo il rombo ABCD e tracciamo la diagonale AC. I triangoli ABC e ADC sono uguali per il terzo criterio, perché hanno il lato AC in comune e i lati corrispondenti (AB e AD da una parte, e CB e CD dall'altra) sono uguali. Tracciamo adesso la diagonale BD e indichiamo con O il punto comune ad AC e a BD. Consideriamo adesso i triangoli AOB e AOD. Essi hanno in comune il lato AO, e inoltre i lati AB e AD sono uguali per ipotesi, mentre l'angolo $\angle$OAB è uguale all'angolo $\angle$OAD a causa dell'uguaglianza dei triangoli ABC e ADC. Quindi l'angolo $\angle$AOB è uguale all'angolo $\angle$AOD. Ma questi due angoli sono supplementari: quindi essi sono retti. ■

Lemma. *In un parallelogramma le diagonali si tagliano reciprocamente a metà.*



Dimostrazione. Dato il parallelogramma ABCD, supponiamo che le diagonali AC e BD si incontrino nel punto O. I triangoli AOD e COB sono uguali per il secondo criterio, perché i lati AD e BC sono uguali, così come gli angoli $\angle DAO$ e $\angle BCO$ da una parte, e $\angle ADO$ e $\angle CBO$ dall'altra, perché alterni interni per le rette AD e CB rispettivamente rispetto alla trasversale AC alla trasversale BD. Quindi DO è uguale a OB. Allo stesso modo si dimostra che AO è uguale a OC. ■

Teorema. *Un parallelogramma le cui diagonali sono perpendicolari è un rombo.*



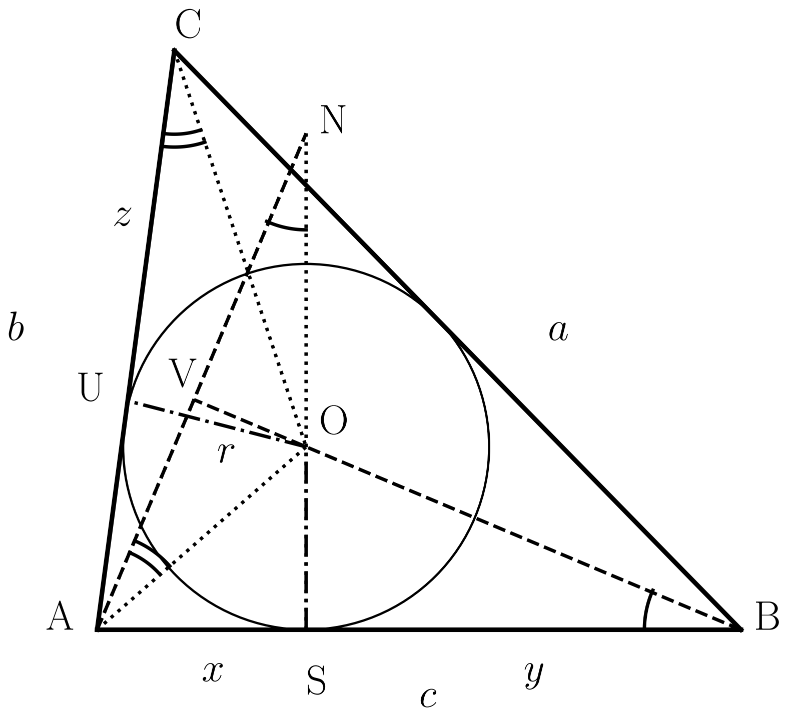
Dimostrazione. Dato il quadrilatero ABCD, indichiamo con O il punto d'incontro delle perpendicolari. I triangoli AOB e AOD sono uguali per il primo criterio, perché hanno il lato AO in comune, il lato OB è uguale al lato OD, per il lemma appena dimostrato, e gli angoli compresi fra questi lati sono uguali perché retti. Quindi AB è uguale ad AD. Ma AB è uguale a CD, mentre AD è uguale a BC, e quindi i quattro lati sono uguali. ■

Teorema. *Un quadrilatero in cui i quattro lati sono uguali è un rombo.*

Dimostrazione. Poiché un rombo è un parallelogramma in cui i quattro lati sono uguali, dobbiamo solo dimostrare che il quadrilatero così costruito è un parallelogramma. Ora, dato che tutti i lati sono uguali, i lati opposti sono anch'essi uguali fra loro. Ma abbiamo già dimostrato che se in un quadrilatero i lati opposti sono uguali esso è un parallelogramma. ■

7 Formula di Erone

Lemma. *L'area di un triangolo è pari al prodotto del suo semiperimetro p per il raggio r del cerchio inscritto in esso.*



Dimostrazione. Dato il triangolo ABC, sia O il centro del cerchio inscritto, tangente ad ABC rispettivamente nei punti D, E, F. Allora

$$\triangle \mathrm{ABC} = \triangle \mathrm{AOC} + \triangle \mathrm{BOC} + \triangle \mathrm{COA}.$$

Ma per ciascuno dei triangoli di vertice O l'altezza è uguale a r, mentre la base è uno dei lati del triangolo ABC. Abbiamo così

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2} r(a+b+c) = rp.$$

■

Formula di Erone. *Dati i tre lati, a, b, e c di un triangolo, la sua area $\triangle$ABC è data da*

$$\triangle \mathrm{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

dove $p = (a+b+c)/2$ è il semiperimetro.

Dimostrazione. (Eulero) Dato il triangolo ABC e detto O il centro del cerchio inscritto in esso, denotiamo con r il raggio del cerchio inscritto e con x, y e z, rispettivamente, le distanze dai vertici A, B, C dei punti di tangenza del cerchio con i lati AB, BC e CA. Si tracci la normale AVN alla bisettrice dell'angolo in B passante per A. Indichiamo con V l'intersezione di questa retta con la bisettrice, e con N la sua intersezione con la normale al lato AB passante per O. L'angolo $\angle$AOV è l'angolo esterno al triangolo AOB. Quindi

$$\angle \mathrm{AOV} = \angle \mathrm{OAB} + \angle \mathrm{OBA} = \alpha/2 + \beta/2,$$

dove α, β e γ sono rispettivamente gli angoli in A, B, e C. Quindi, dato che AOV è rettangolo, $\angle$AOV e $\angle$OAV sono complementari. Quindi $\alpha/2 + \beta/2 + \angle \mathrm{OAV} = \pi/2 = \alpha/2 + \beta/2 + \gamma/2$. Ne segue che $\angle \mathrm{OAV} = \gamma/2 = \angle \mathrm{OCU}$. Di conseguenza, i triangoli OAV e OCU sono simili, il che implica

$$\frac{\overline{\mathrm{AV}}}{\overline{\mathrm{VO}}} = \frac{\overline{\mathrm{CU}}}{\overline{\mathrm{OU}}} = \frac{z}{r}. \tag{1}$$

D'altra parte, poiché AN è perpendicolare a BV e NS è perpendicolare a BS, gli angoli $\angle$VBA e $\angle$ANS sono eguali, e quindi i triangoli NOV, NAS e BAV sono simili. Quindi

$$\frac{\overline{\mathrm{AV}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{\overline{\mathrm{OV}}}{\overline{\mathrm{ON}}},$$

e cioè

$$\frac{\overline{\mathrm{AV}}}{\overline{\mathrm{OV}}} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{ON}}}. \tag{2}$$

Dalle (1) e (2) otteniamo

$$\frac{z}{r} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{ON}}} = \frac{x+y}{\overline{\mathrm{SN}} - r},$$

da cui otteniamo

$$z\,\overline{\mathrm{SN}} = r(x+y+z) = rp,$$

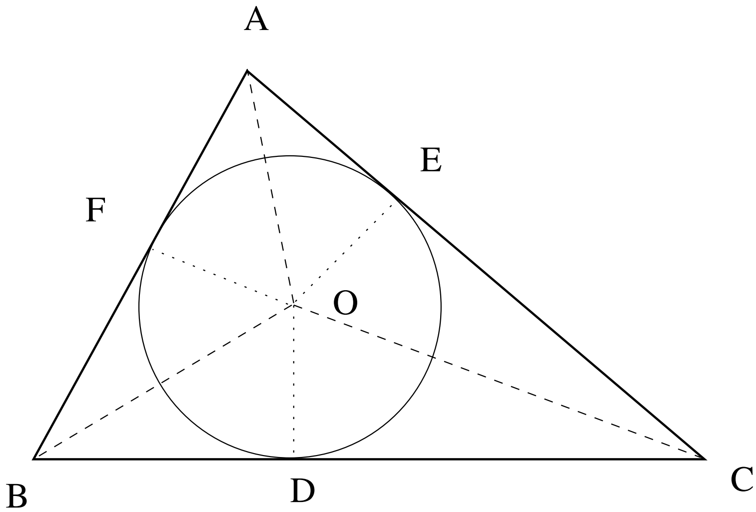
dove p è il semiperimetro. D'altra parte $\angle$BOS e $\angle$VON sono congruenti (entrambi complementari a $\angle$VBA e $\angle$ANS che, come abbiamo visto, sono uguali). Quindi i triangoli NAS e BOS sono simili, per cui $\overline{\mathrm{SN}}/\overline{\mathrm{AS}} = \overline{\mathrm{BS}}/\overline{\mathrm{OS}}$. Ne segue che $\overline{\mathrm{SN}}/x = y/r$, e cioè $\overline{\mathrm{SN}} = (xy)/r$. Otteniamo così

$$\begin{aligned} \triangle \mathrm{ABC} &= rp = \sqrt{rp(rp)} = \sqrt{z\,\overline{\mathrm{SN}}(rp)} = \sqrt{z\left(\frac{xy}{r}rp\right)} \\ &= \sqrt{xyzp} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \end{aligned}$$

■

8 Punti notevoli di un triangolo

Teorema. *In un triangolo, le bisettrici degli angoli al vertice s'incontrano in uno stesso punto, detto **incentro**.*

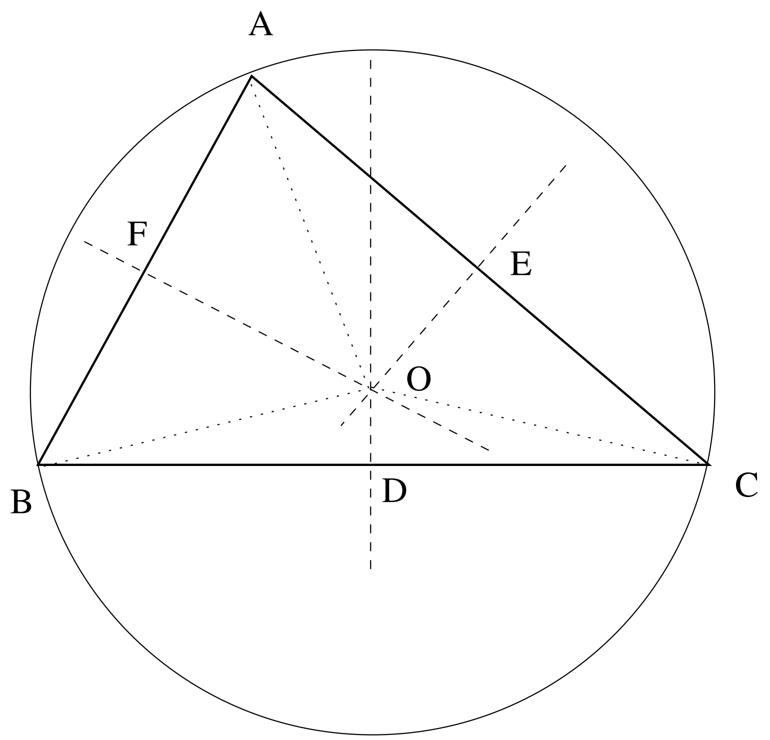


Dimostrazione. Considerando il triangolo ABC, si traccino le bisettrici degli angoli $\angle$ABC e $\angle$ACB. Esse si incontrano nel punto O. Si traccino da O le perpendicolari OD al lato BC, OE al lato AC e OF al lato AB. Gli angoli $\angle$BOD e $\angle$BOF sono uguali perché complementari di angoli uguali. Quindi i triangoli BOD e BOF sono congruenti per il secondi criterio, dato che hanno il lato BO in comune, e uguali rispettivamente gli angoli posti agli estremi. Analogamente si dimostra che i triangoli COD e COE sono uguali. Quindi $\overline{OF} = \overline{OD} = \overline{OE}$. Ora i due triangoli rettangoli AEO e AFO hanno in comune l'ipotenusa AO e hanno uguali i cateti OE e OF: quindi anche gli altri cateti AE e AF sono uguali, e sono quindi congruenti per il terzo criterio. Ma allora gli angoli $\angle$OAB e $\angle$OAC sono uguali, e il punto O appartiene alla bisettrice dell'angolo al vertice in A. ■

Corollario. *L'incentro è il centro del cerchio inscritto al triangolo.*

Dimostrazione. In effetti le distanze $\overline{OD}$, $\overline{OE}$ e $\overline{OF}$ dai lati BC, CA e AB rispettivamente, sono uguali. ■

Teorema. *In un triangolo, gli assi relativi ai tre lati s'incontrano in un unico punto detto **circocentro**.*

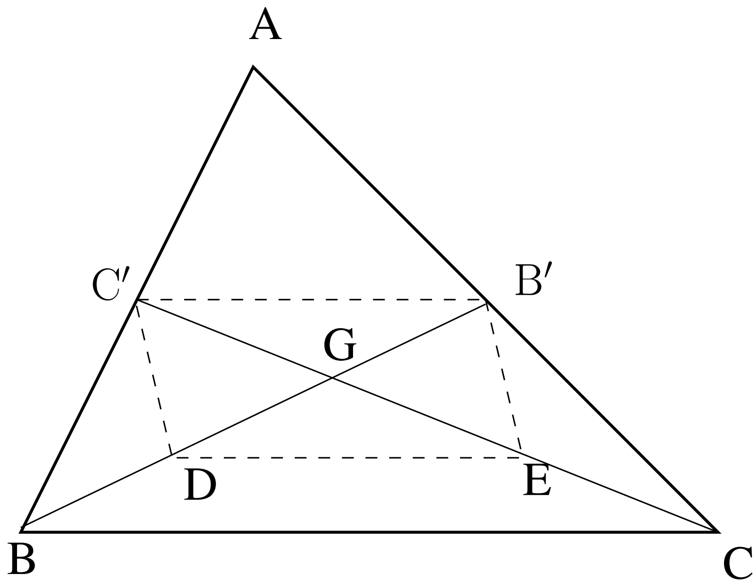


Dimostrazione. Dato il triangolo ABC, indichiamo con E il punto medio del lato AC e con F il punto medio del lato AB, e tracciamo rispettivamente in E e in F le perpendicolari ai rispettivi lati. Indichiamo con O il loro punto d'incontro. I triangoli rettangoli OFB e OFA sono congruenti per il primo criterio, perché hanno in comune il lato OF e i lati BF e FA sono uguali per costruzione, mentre l'angolo compreso è retto. Analogamente si dimostra che i triangoli OEC e OEA sono uguali. Quindi $\overline{OB} = \overline{OA} = \overline{OC}$. Quindi il triangolo OBC è isoscele in O. Tracciamo la perpendicolare OD da O al lato BC. I due triangoli rettangoli ODB e ODC sono uguali, e quindi $\overline{DB} = \overline{DC}$, per cui O si trova anche sull'asse del lato BC. ■

Corollario. *Il circocentro è il centro del cerchio circoscritto al triangolo.*

Dimostrazione. Le distanze $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$ del circocentro dai vertici del triangolo sono uguali. ■

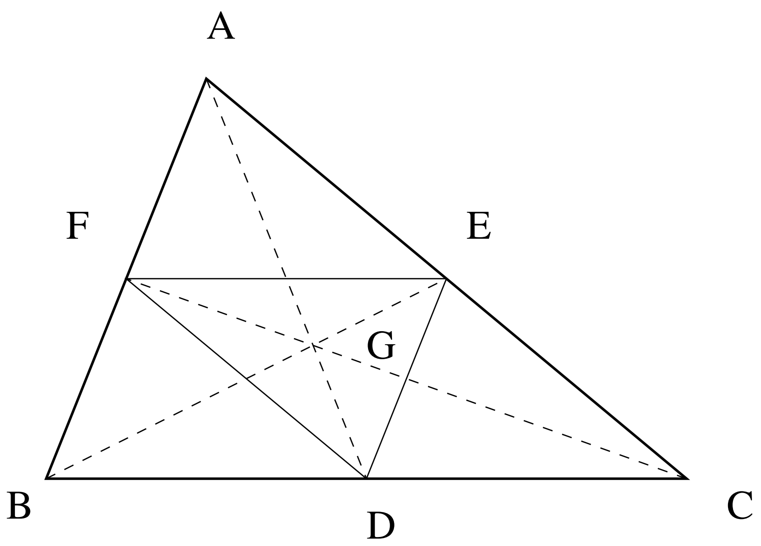
Teorema. *In un triangolo, le rette che congiungono rispettivamente un vertice al punto medio del lato opposto, dette **mediane**, si incontrano in un punto, detto **baricentro**. Il baricentro divide la mediana in due parti, la cui lunghezza è una il doppio dell'altra.*



Dimostrazione. Dato il triangolo ABC, indichiamo con A′ il punto medio del lato BC, ecc. Tracciamo le rette BB′ e CC′. Esse si incontreranno nel punto G. Tracciamo adesso la retta B′C′. Il triangolo AB′C′ è simile al triangolo ABC, e quindi B′C′ è parallela al lato BC. Consideriamo ora il triangolo GBC, e sia D il punto medio del segmento GB, ed E il punto medio del segmento GC. Il triangolo GDE è simile al triangolo GBC, e quindi la retta DE è parallela al lato BC. Quindi il quadrilatero B′C′DE è un parallelogramma, e di conseguenza le sue diagonali B′E e DC′ si tagliano per metà nel punto G. Ma, per ipotesi, D è il punto medio del segmento GB, quindi G taglia il segmento BB′ in BG e GB′, tali che la lunghezza del primo è il doppio di quella del secondo. Analogamente vale per il segmento CC′. Consideriamo adesso il punto G′, punto d'incontro di BB′ e AA′. Con lo stesso ragionamento si vede che esso taglia allo stesso modo AA′ e BB′. Ma c'è un solo punto su BB′ che lo tagli in queste proporzioni, ed esso è G. Quindi G′ coincide con G. ■

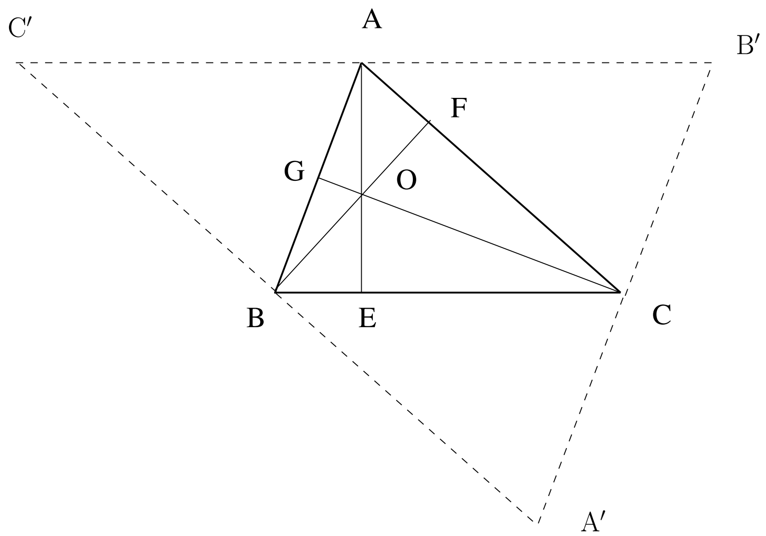
Triangolo mediano. *Dato un triangolo* ABC, *il triangolo* DEF *i cui vertici sono i punti medi dei lati di* ABC *è detto il suo* ***triangolo mediano.***

Teorema. *Il triangolo mediano del triangolo* ABC *è simile ad esso, e il suo baricentro coincide con il baricentro del triangolo* ABC.



Dimostrazione. Il triangolo AFE è simile al triangolo ABC poiché i due triangoli hanno in comune l'angolo di vertice A, e i lati AF e AE sono rispettivamente proporzionali ai lati AB e AC, e pari alla metà di essi. Quindi $\overline{DE} = \overline{BC}/2$. Allo stesso modo si mostra che $\overline{DF} = \overline{AC}/2$ e $\overline{EF} = \overline{AB}/2$. Quindi i due triangoli sono simili perché i rispettivi lati sono proporzionali. Allo stesso modo si può far cedere che i triangoli FBD, EDC e AFE sono tutti congruenti al triangolo DEF. Così si vede che FE è parallela al lato BC, poiché gli angoli alterni interni DFE e FDB sono uguali. Quindi FEDB è un parallelogramma, e le sue diagonali si tagliano a metà. Quindi BE è anche la mediana di DEF in E, e G è il punto d'intersezione delle tre mediane di DEF. ■

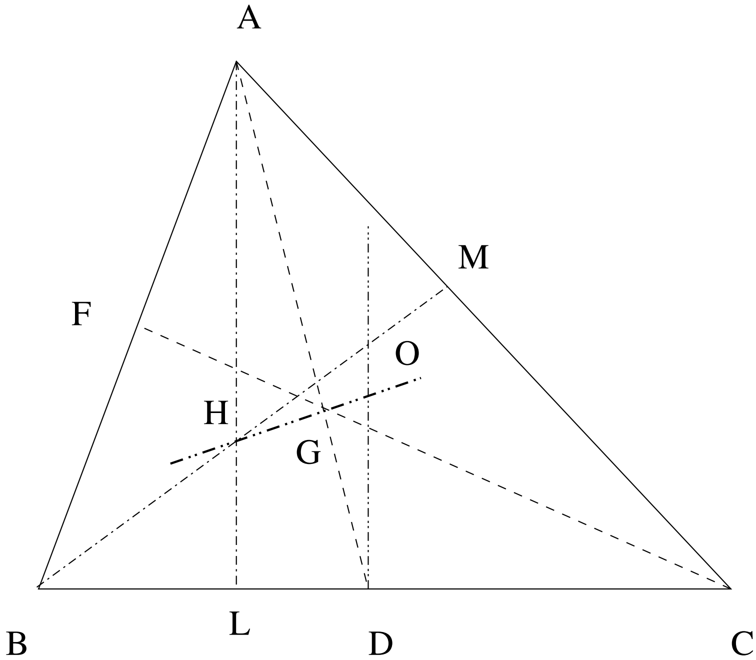
Teorema. *In un triangolo, le tre altezze si incontrano in un punto, detto **ortocentro**.*



Dimostrazione. Dato il triangolo ABC, tracciamo la parallela al lato BC passante per A, e così via per gli altri due lati. Otteniamo un nuovo triangolo A′B′C′. Consideriamo adesso il quadrilatero ABA′C. I suoi lati opposti sono paralleli due a due, quindi esso è un parallelogramma, e quindi AB è congruente ad $A'C$, mentre AC è congruente a BA'. Allo stesso modo si mostra che AB è congruente a CB' e BC è congruente ad AB', ecc. Quindi le altezze AE, BF e CG, che sono perpendicolari a BC, AC ed AB rispettivamente, sono anche gli assi dei lati $B'C'$, $A'C'$ e $A'B'$ rispettivamente, e si incontrano in un punto O che è il circocentro del triangolo $A'B'C'$. ■

Corollario. *Il circocentro di un triangolo coincide con l'ortocentro del suo triangolo mediano.*

Retta di Eulero. *Dato un triangolo* ABC, *il suo ortocentro* H, *il suo baricentro* G *e il suo circocentro* O *sono allineati. Inoltre il baricentro* G *si trova tra* O *e* H, *e si ha* $\overline{HG} = 2\overline{OG}$.

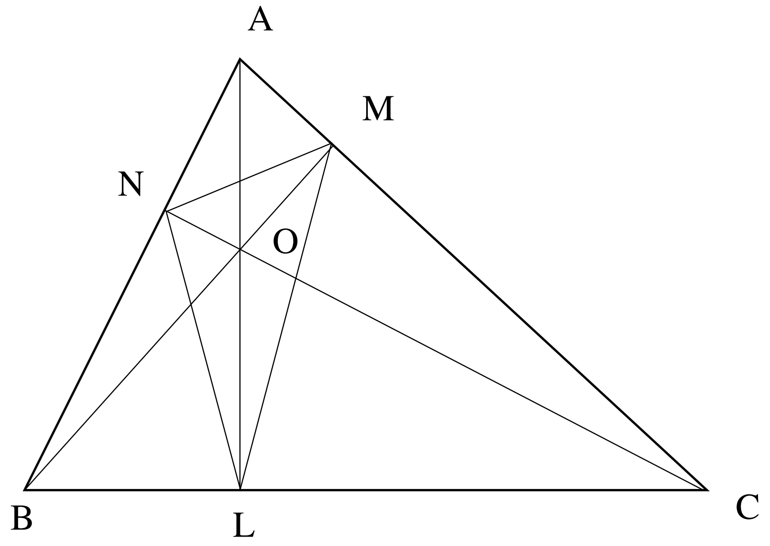


Dimostrazione. Dato il triangolo ABC, indichiamo con D il punto medio di BC, e con F il punto medio di AB. Il baricentro G è l'intersezione di AE con CF. Tracciamo inoltre la perpendicolare AL al lato BC e la perpendicolare BM al lato AC, e sia H (l'ortocentro) la loro intersezione. Sulla retta individuata da H e G identifichiamo il punto O, posto dall'altra parte di G rispetto a H, e tale che $\overline{OC}$=$\overline{GH}/2$. I triangoli AGH e DGO sono simili, perché i lati HG e OG sono uno il doppio dell'altro per costruzione, i lati AG e DG sono uno il doppio dell'altro perché il baricentro taglia le mediane a uhn terzo della lunghezza, e gli angoli $\angle$HGA e $\angle$DGO sono uguali perché opposti al vertice. Quindi gli angoli $\angle$HAG e $\angle$GDO sono uguali, e poiché sono angoli alterni interni rispetto alle rette AH e DO, esse sono parallele. Quindi DO è perpendicolare al lato BC e passa per il suo punto medio D, ed è quindi l'asse di BC. Così O si trova sull'asse di BC. Allo stesso modo si mostra che esso si trova su ciascuno degli altri assi, ed è quindi il circocentro. ■

Commento. Se il triangolo ABC è equilatero, la retta di Eulero non è definita. In effetti, in questo caso, G, O e C coincidono.

Triangolo delle altezze. *In un triangolo acutangolo* ABC*, il triangolo i cui vertici sono i piedi* LMN *delle perpendicolari da ciascun vertice al lato opposto è detto* ***triangolo delle altezze****.*

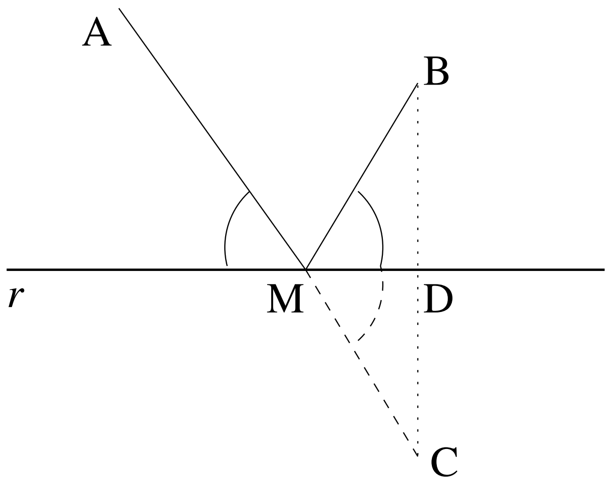
Teorema. *L'ortocentro di un triangolo acutangolo* ABC *coincide con l'incentro del suo triangolo delle altezze* LMN.



Dimostrazione. Si considerino i triangoli rettangoli BMA e CNA. Gli angoli $\angle$ABM e $\angle$ACN sono uguali perché entrambi complementari dell'angolo $\angle$BAC. Quindi i due triangoli sono simili, per cui $\overline{AN} : \overline{AM} = \overline{AC} : \overline{BC}$. Quindi il triangolo AMN è simile al triangolo ABC, per cui $\angle ANM = \angle ACB$. Analogamente si mostra che il triangolo LBN è simile al triangolo ABC, per cui $\angle BNL = \angle ACB$. Quindi $\angle MNC = \angle LNC$, perché complementari di angoli uguali, e quindi l'ortocentro O si trova sulla bisettrice dell'angolo $\angle$LNM. Allo stesso modo si prova che O si trova sulla bisettrice dell'angolo $\angle$LMN, e quindi che esso coincide con l'incentro di LMN. ■

Commento. Il triangolo delle altezze è il triangolo di minor perimetro i cui vertici giacciono sui tre lati del triangolo ABC. Per mostrare questa proprietà è necessario introdurre un lemma.

Lemma di Erone. *Siano dati due punti* A *e* B*, situati dalla stessa parte di una retta data r. Allora il cammino più breve che congiunge* A *con* B *toccando r è costituito dalla spezzata* AMB*, dove* M *appartiene a r, e gli angoli formati da* AM *e* BM *con r sono congruenti.*



Dimostrazione. Tracciamo da B la normale a r e sia D la sua intersezione con r. Sia C il punto su questa normale tale che $\overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{CD}}$. La retta che congiunge A con C interseca r nel punto M, e gli angoli formati da AM e CM con r sono congruenti perché opposti al vertice. D'altra parte è ovvio che il cammino più breve fra A e C è il segmento AC. Ora il triangolo rettangolo BMD è congruente al triangolo CMD, poiché essi hanno il cateto DM in comune e i cateti BD e CD uguali per costruzione. Quindi $\angle\mathrm{BMD} = \angle\mathrm{CMD}$. Ora il nostro problema è risolto dalla spezzata (AMB), di lunghezza uguale a quella di AC. E in questa l'angolo $\angle\mathrm{BMD}$ è uguale all'angolo fra AM e r. ■

Possiamo così dimostrare il

Teorema di Schwartz. *Il triangolo delle altezze di un triangolo acutangolo dato è il triangolo di minimo perimetro che può essere iscritto in esso.*

Dimostrazione. Dato il triangolo ABC, sia LMN il corrispondente triangolo delle altezze. È chiaro che qualunque triangolo che soddisfi al condizione di minimo perimetro, per il lemma di Erone, deve essere tale che i suoi lati incidenti su un vertice formino angoli uguali con il lato cui appartiene il vertice. Mostriamo che il triangolo delle altezze è l'unico che possiede questa proprietà. Supponiamo infatti che ce ne sia un altro, p.es., L′M′N′. Ora $\angle\mathrm{N'L'B}$ non può essere differente da $\angle\mathrm{NLB}$. Supponiamo infatti che si abbia $\angle\mathrm{N'L'B} > \angle\mathrm{NLB}$. Allora si ha $\angle(L'N'B) = \pi - \angle(N'BL') - \angle\mathrm{N'L'B} < \angle\mathrm{NLB}$. Quindi $\angle\mathrm{N'M'A} = \pi - \angle\mathrm{M'AN'} - \angle\mathrm{AN'M'} < \angle\mathrm{AMN}$ perché $\angle\mathrm{AN'L'} = \angle\mathrm{L'N'B}$. Ma considerando $\angle\mathrm{M'L'C}$ e $\angle\mathrm{CL'M'}$ si vede che $\angle\mathrm{L'M'C} > \angle\mathrm{LMC}$. Quindi $\angle\mathrm{L'M'C}$ e $\angle\mathrm{N'M'A}$ non possono essere uguali. Di conseguenza, se un tale triangolo esiste, i suoi angoli debbono essere uguali a quelli del triangolo delle altezze. Quindi il triangolo delle altezze e questo triangolo debbono essere simili. Ma la bisettrice di ciascuno degli angoli di questo triangolo deve essere parallela all'altezza, quindi i lati di questo triangolo e del triangolo delle altezze debbono essere paralleli. Supponiamo, p.es., che $\overline{\mathrm{L'M'}} > \overline{\mathrm{LM}}$. Allora si deve avere anche $\overline{\mathrm{M'N'}} > \overline{\mathrm{MN}}$. D'altra parte, anche i triangoli AMN e AM′N′ sono simili, e quindi se $\overline{\mathrm{AM'}} < \overline{\mathrm{AN}}$ si deve avere $\overline{\mathrm{M'N'}} < \overline{\mathrm{MN}}$. Quindi M′N′ è allo stesso tempo più lungo e più breve di MN, e quindi un tale triangolo, diverso dal triangolo delle altezze, non esiste. ■

9 Cerchio dei nove punti

Dato un triangolo ABC, esiste un cerchio che passa per nove punti notevoli:

- I tre punti medi dei lati;
- I tre piedi delle altezze (due di questi punti si trovano *fuori* del triangolo se esso è ottusangolo);
- I tre punti medi dei segmenti che collegano i vertici del triangolo all'ortocentro (il punto in cui si incontrano le tre altezze): questi punti si trovano all'esterno del triangolo se esso è ottusangolo, poiché, in questo caso, l'ortocentro è esterno al triangolo.

Questo cerchio è detto **cerchio dei nove punti** o **cerchio di Feuerbach**.

Per derivare questo risultato, avremo dapprima bisogno del seguente

Lemma. *Dato un triangolo* ABC, *la retta che congiunge i punti medi dei lati* AB *e* AC *è parallela alla base* BC.

Dimostrazione. Indichiamo con E il punto medio del lato AC e con F quello del lato AB. Allora i triangoli ABC e AFE sono simili, perché hanno il comune l'angolo $\angle$BAC, e perché i lati corrispondenti sono proporzionali. Quindi $\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{AFE}$. Ma questi sono angoli corrispondenti per le rette BC e FE rispetto alla trasversale AB. Quindi FE è parallela a BC. ■

Possiamo allora dimostrare dapprima il seguente

Teorema. *Dato il triangolo* ABC, *sia* H *il punto d'intersezione delle tre altezze, e siano* D, E *e* F *rispettivamente i punti medi dei lati* BC, AC *e* AB. *Indichiamo inoltre con* L, M *e* N, *rispettivamente, i punti medi dei segmenti* AH, BH *e* CH. *Allora i punti* $\mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}$ *e* $\mathrm{L}, \mathrm{M}, \mathrm{N}$ *si trovano su uno stesso cerchio.*

Dimostrazione. Per il lemma appena dimostrato, la retta FE che congiunge i punti medi dei lati AB e AC, è parallela all'altro lato BC. Allo stesso modo, la retta MN, che congiunge i punti medi dei lati HB e HC del triangolo HBC, è parallela al lato BC. D'altra parte la retta FM, che congiunge i punti medi dei lati AB e BH del triangolo ABH, è parallela all'altro lato AH. Lo stesso può dirsi della retta EN rispetto al triangolo AHC. Quindi il quadrilatero FENM è un parallelogramma, anzi un rettangolo, perché AH è perpendicolare a BC, trattandosi di un'altezza. Quindi esso è inscrivibile in un cerchio, il cui centro si trova nel punto medio comune K delle diagonali EM e FN. Allo stesso modo si mostra che il quadrilatero DFLN è un rettangolo: esso condivide con FENM la diagonale FN, e quindi il centro K. Quindi un solo cerchio passa per tutti i sei punti. ■

Possiamo quindi dimostrare il

Teorema del cerchio dei nove punti. *Il cerchio che passa per i punti medi dei lati di un triangolo passa anche per i piedi delle altezze del triangolo stesso.*

Dimostrazione. Dato il triangolo ABC, indichiamo con D, E, F i punti medi rispettivi dei lati BC, AC e AB, e con L, M, N quelli dei segmenti AH, BH e CH, dove H è il punto d'incontro delle tre altezze. Indichiamo inoltre con HA l'intersezione con la retta BC della perpendicolare ad essa passante per A, e con HB e HC i corrispondenti punti sui lati AC e AB o sui loro prolungamenti. Il teorema precedente ci dice che i punti D, E, F e L, M, N si trovano su uno stesso cerchio, di cui i segmenti FN, EM e DL sono dei diametri. Consideriamo adesso il triangolo D HA L, che è rettangolo in HA e quindi è inscrivibile in un semicerchio di cui l'ipotenusa DL è il diametro. Ma abbiamo visto che DL è anche diametro del cerchio che passa per i punti medi. Analogamente si mostra che questo cerchio passa per i punti HB, HC. ■

È da notare che il centro K del cerchio dei nove punti si trova sulla retta OH che congiunge il circocentro O del triangolo al suo ortocentro H (retta di Eulero). Su di essa si trova anche il baricentro G del triangolo stesso.

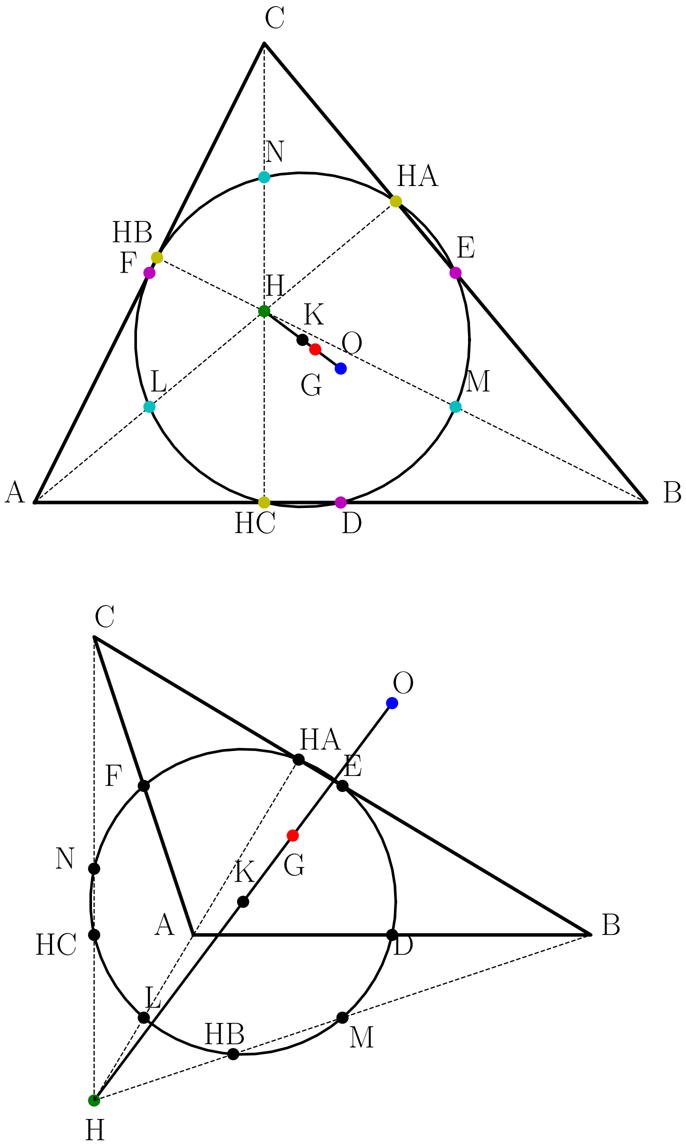


Figura 1: Cerchio dei nove punti e retta di Eulero. Sopra: triangolo acutangolo. Sotto: Triangolo ottusangolo.