Dinamica del punto materiale

Formule fondamentali

L. P.

5 Aprile 2010

N.B.: Le relazioni riportate sono valide in un *sistema di riferimento inerziale.*

Princìpi della dinamica

Secondo principio della dinamica

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{f}_{\mathrm{ris}}. \tag{1}$$

Tipi di forze

La forza-peso

La forza-peso è

- Proporzionale alla massa dell'oggetto;
- Uniforme nello spazio e costante nel tempo.

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{P}} = m\boldsymbol{g}; \qquad \boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{k}. \tag{2}$$

In questa equazione, $\boldsymbol{k}$ è il versore dell'asse z, diretto verticalmente verso l'alto, e g vale

$$g = 9.80665\ \mathrm{ms}^{-1}. \tag{3}$$

N.B.: g dipende dalla latitudine e (più debolmente) dal luogo considerato.

Moto di un corpo soggetto alla forza-peso

Equazione del moto: $\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t^2 = \boldsymbol{g}$;

Legge oraria del moto: $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{g}t^2/2$.

Traiettoria: $z(x) = z_0 + v_{0z}(x/v_{0x}) - g(x/v_{0x})^2/2$, partendo da $(x(0) = 0, z(0) = z_0)$ con velocità $\boldsymbol{v}_0 = v_{0x}\boldsymbol{i} + v_{0z}\boldsymbol{k}$.

Forza elastica

La forza elastica è descritta da

$$\boldsymbol{f} = -k\boldsymbol{r}, \tag{4}$$

dove $\boldsymbol{r}$ è il vettore deformazione dall'equilibrio e k è la costante di Hooke. In una dimensione (lungo l'asse x) si ha

$$f = -kx. \tag{5}$$

Moto di un corpo soggetto alla forza elastica (lungo l'asse x)

Equazioni del moto: $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = -\omega^2 x$, dove $\omega^2 = k/m$.

Legge oraria del moto: $x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t = A\cos(\omega t - \phi)$, dove $A = \sqrt{a^2+b^2}$; $\tan\phi = b/a$.

La quantità ω è detta *frequenza angolare* o *pulsazione.* Il *periodo* T è dato da $T = 2\pi/\omega$. La *frequenza* ν è pari all'inverso del periodo ed è data da $\nu = \omega/2\pi$.

Resistenza di un mezzo viscoso

La resistenza di un mezzo viscoso (fluido) è espressa da

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{R}} = -\lambda\boldsymbol{v}, \tag{6}$$

dove $\boldsymbol{v}$ è la velocità relativa del corpo rispetto al mezzo considerato, e $\lambda > 0$ è chiamato il *coefficiente di resistenza.*

Legge di Stokes Per un corpo sferico immerso in un fluido, si ha

$$\lambda = 6\pi\eta R, \tag{7}$$

dove R è il raggio del corpo, e la quantità η (che ha per unità $\mathrm{Nm^{-2}s}$) dipende solo dal fluido ed è chiamata *viscosità.*

Moto di un grave in un fluido di densità ρ_0 L'equazione del moto di un grave, sottoposto alla forza-peso, alla spinta di Archimede, e alla resistenza del mezzo, ha per espressione

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = (m - \rho_0 V)\,\boldsymbol{g} - \lambda\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}. \tag{8}$$

Il termine $-\rho_0 V\boldsymbol{g}$, dove V è il volume del corpo, rappresenta la spinta di Archimede (opposta al peso del fluido spostato).

Legge oraria del moto Si considera un grave che si muove verticalmente lungo l'asse z.

- *Velocità:* Dall'equazione per la velocità $v = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$
$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\left(m - \rho_0 V\right) g - \lambda v, \tag{9}$$
si ottiene
$$v(t) = v_{\mathrm{lim}} + \left(v_0 - v_{\mathrm{lim}}\right) \mathrm{e}^{-t/\tau}, \tag{10}$$
dove
$$v_{\mathrm{lim}} = -\frac{(m - \rho_0 V)g}{\lambda}; \qquad \tau = m/\lambda. \tag{11}$$
- *Spostamento:* Integrando la relazione precedente, otteniamo
$$z(t) = z_0 + v_{\mathrm{lim}} t + \tau \left(v_0 - v_{\mathrm{lim}}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right). \tag{12}$$

Oscillatore smorzato

L'*oscillatore smorzato* è un corpo sottoposto alla forza elastica e alla resistenza del mezzo. Consideriamo il moto in una dimensione, lungo l'asse x.

Equazioni del moto: $m\,\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = -kx - \lambda\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$.

Legge oraria del moto: $x(t) = A\,\mathrm{e}^{-\lambda t/2}\cos\left(\omega t - \phi\right)$, dove $\omega^2 = k/m - \lambda^2/4$. Si suppone $\lambda < 2k/m$ (moto *sottosmorzato*). Notare il fattore $\frac{1}{2}$ nell'argomento dell'esponenziale decrescente.

Pendolo semplice

Il *pendolo semplice* è un punto materiale di massa m, soggetto alla forza-peso e vincolato a muoversi su un cerchio verticale di raggio ℓ. Indichiamo con θ l'angolo formato dal raggio con la verticale passante per il centro del cerchio, diretta verticalmente verso il basso. Il segno è positvo se l'angolo è percorso in verso antiorario.

Equazione del moto: $m\ell\,\mathrm{d}^2\theta/\mathrm{d}t^2 = -mg\sin\theta$ (esatta). Mediante l'approssimazione $\sin\theta \simeq \theta$ (angoli misurati in radianti!) si ottiene $\mathrm{d}^2\theta/\mathrm{d}t^2 = -\omega^2\theta$, dove $\omega^2 = g/\ell$.

Altra forma dell'equazione del moto: Proiettando il moto sull'asse orizzontale x, e trascurando termini di ordine eguale o superiore a x^2, si ottiene
$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -m\frac{g}{\ell}x.$$

La frequenza angolare ω del pendolo non dipende dalla massa m del corpo. Inoltre (come in tutti gli oscillatori armonici) essa non dipende dall'ampiezza delle oscillazioni (*isocronia*), purché esse siano piccole (per cui l'approssimazione $\sin\theta \simeq \theta$ rimane valida).

Pendolo conico

Il *pendolo conico* è un punto materiale appeso a un filo inestensibile e di massa trascurabile, che si mpuove di moto circolare uniforme in un piano orizzontale. La componente orizzontale della forza applicata al corpo vale $-mg\tan\theta$, dove θ è l'angolo che il filo forma con la verticale. L'accelerazione centripeta vale $mv^2/\ell\sin\theta$, dove ℓ è la lunghezza del filo. Quindi la condizione per cui il moto del pendolo sia un moto circolare uniforme è che la velocità angolare $\omega = v/\ell\sin\theta$ soddisfi

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell\cos\theta}. \tag{13}$$

Attrito fra superfici solide

Attrito statico Fra corpi solidi a contatto tramite una superficie piana, detta N la componente normale della forza che tende ad avvicinarli, si esercita una forza d'attrito tangente alla superficie che li mantiene in equilibrio. Questa forza è opposta alla componente tangente della forza applicata, fin tanto che il suo modulo non supera il valore critico

$$f_{\mathrm{c}} = \mu_{\mathrm{S}} N. \tag{14}$$

Il coefficiente $\mu_{\mathrm{S}} > 0$ è detto *coefficiente di attrito statico.* Esso dipende fortemente dalla natura delle superfici a contatto, ma non dalla loro estensione.

Attrito dinamico Se due corpi solidi a contatto mediante una superficie piana sono animati da moto relativo, si esercita fra essi una *forza di attrito radente*, diretta in verso opposto alla velocità relativa, e di modulo pari a

$$f_{\mathrm{A}} = \mu_{\mathrm{D}} N, \tag{15}$$

dove N è la componente normale della forza che tende ad avvicinare i due corpi, e $\mu_{\mathrm{D}} > 0$ è il *coefficiente di attrito dinamico.* Si ha $\mu_{\mathrm{D}} < \mu_{\mathrm{S}}$ fra le stesse superfici.

Sebbene l'attrito dinamico non dipenda in modulo dalla velocità relativa, ne dipende in direzione.

Teorema dell'energia cinetica

Lavoro di una forza

Il lavoro infinitesimo compiuto da una forza $\boldsymbol{f}$ su un corpo che subisce uno spostamento $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ è dato da

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{16}$$

dove il prodotto è il *prodotto scalare.* Se il corpo subisce nell'intervallo di tempo $[t_{\mathrm{i}}, t_{\mathrm{f}}]$ uno spostamento descritto dalla legge oraria del moto $\boldsymbol{r}(t)$, il lavoro compiuto dalla forza è dato da

$$W = \int_{t_{\mathrm{i}}}^{t_{\mathrm{f}}} \boldsymbol{f}(t) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t. \tag{17}$$

Energia cinetica di un punto materiale

L'energia cinetica di un punto materiale di massa m, animato da una velocità $\boldsymbol{v}$, è data da

$$K = \frac{1}{2} m v^2. \tag{18}$$

Teorema dell'energia cinetica

La variazione dell'energia cinetica di un punto materiale nell'intervallo di tempo $[t_\mathrm{i}, t_\mathrm{f}]$ è pari al lavoro della forza risultante sul corpo durante quell'intervallo:

$$\frac{1}{2} m v_\mathrm{f}^2 - \frac{1}{2} m v_\mathrm{i}^2 = W_\mathrm{ris} = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} \boldsymbol{f}_\mathrm{ris}(t) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}t. \tag{19}$$

COMMENTO. Una forza normale alla velocità (e quindi allo spostamento infinitesimo) non compie lavoro, e quindi non contribuisce alla variazione dell'energia cinetica. Questo è, per esempio, il caso delle forze vincolari, prodotte da vincoli lisci e non dipendenti dal tempo.

Forze dissipative Forze come la resistenza del mezzo o l'attrito dinamico, che sono sempre dirette in verso opposto alla velocità relativa rispetto al mezzo o rispetto a uno dei corpi fra cui si esercitano, *compiono sempre lavoro negativo* in quel sistema di riferimento. Esse sono chiamate quindi *forze dissipative*, perché tendono a ridurre l'energia cinetica in quel sistema di riferimento.

Energia potenziale in una dimensione

Se un corpo è vincolato a muoversi lungo una retta, e la componente della forza ad esso applicata parallela alla retta dipende solo dalla sua posizione, il lavoro compiuto dalle forze su di esso in un certo intervallo di tempo dipende solo dalle sue posizioni iniziale e finale. Si ha infatti:

$$W = U(x_\mathrm{i}) - U(x_\mathrm{f}), \tag{20}$$

dove $-U(x)$ è una primitiva di $f(x)$:

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x\, f(x), \tag{21}$$

dove x_0 è arbitrario. Si ha quindi:

$$f(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}. \tag{22}$$

la funzione $U(x)$ è chiamata *energia potenziale.*

La stessa proprietà vale anche se il corpo si muove su una traiettoria non rettilinea, purché la componente della forza applicata tangente alla traiettoria dipenda solo dalla sua posizione.

Conservazione dell'energia meccanica

Nelle condizioni del paragrafo precedente, la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale (chiamata *energia meccanica*) rimane costante durante il moto del corpo:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) = \text{const.} \tag{23}$$

Notare che, se la traiettoria non è rettilinea, v è il modulo della velocità vettoriale, e non solo della sua componente tangente: ma il lavoro è compiuto solo dalle forze che hanno una componente tangente non nulla.

Energia potenziale della forza-peso L'energia potenziale della forza-peso ha per espressione

$$U(z) = mgz, \tag{24}$$

dove z è la quota (riferita ad un piano arbitrario).

Energia potenziale dell'oscillatore armonico L'energia potenziale dell'oscillatore armonico ha per espressione

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2, \tag{25}$$

dove k è la costante di Hooke.

Impulso e quantità di moto di un punto materiale

L'impulso che una forza $\boldsymbol{f}(t)$ trasmette a un punto materiale durante un breve intervallo di tempo di durata $\mathrm{d}t$ è dato da

$$\mathrm{d}\boldsymbol{J} = \boldsymbol{f}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{26}$$

In un intervallo di tempo finito si ha

$$\boldsymbol{J} = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} \boldsymbol{f}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{27}$$

Quantità di moto

La quantità di moto di un punto materiale di massa m animato da una velocità $\boldsymbol{v}$ è il vettore definito da

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}. \tag{28}$$

Teorema dell'impulso

La variazione della quantità di moto di un punto materiale in un certo intervallo di tempo $[t_\mathrm{i}, t_\mathrm{f}]$ è pari all'impulso della forza risultante ad esso applicata:

$$\boldsymbol{p}_\mathrm{f} - \boldsymbol{p}_\mathrm{i} = \boldsymbol{J}_\mathrm{ris} = \int_{t_\mathrm{f}}^{t_\mathrm{f}} \boldsymbol{f}_\mathrm{ris}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{29}$$

Momento angolare e momento di una forza

Il *momento di una forza* $\boldsymbol{f}$ applicata a un punto materiale, valutato rispetto a un punto O, è definito da

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}, \tag{30}$$

dove $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ è il raggio vettore della posizione P del punto materiale, preso a partire dal punto O. Il prodotto è il *prodotto vettoriale*.

Momento della quantità di moto (momento angolare)

Il *momento della quantità di moto* (o *momento angolare*) di un punto materiale di massa m posto in P e animato da una velocità $\boldsymbol{v}$, preso rispetto a un punto O, è dato da

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}, \tag{31}$$

dove $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ è il raggio vettore della posizione P del punto materiale, preso a partire dal punto O, e $\boldsymbol{p}$ è la quantità di moto del punto materiale.

Teorema del momento angolare

La variazione del momento angolare $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ di un punto materiale rispetto a un punto O in un breve intervallo di tempo $\mathrm{d}t$ è pari a $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{ris}}\,\mathrm{d}t$, dove $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{ris}}$ è il momento della forza risultante applicata al punto materiale, preso rispetto allo stesso punto O:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{ris}}\,\mathrm{d}t. \tag{32}$$

In particolare, se il momento $\boldsymbol{\tau}$ è nullo, il momento angolare $\boldsymbol{L}$ rimane costante.

Forze centrali

Una forza che si esercita su un punto materiale è detta *forza centrale* uscente dal punto O se essa è sempre parallela al raggio vettore $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ della posizione P del punto materiale, preso a partire dal punto O. Il momento di una forza centrale uscente dal punto O, valutato rispetto al punto O stesso, è sempre nullo. Di conseguenza, il momento angolare relativo del punto materiale considerato rimane costante. È il caso di un corpo libero (non sottoposto ad alcuna forza) rispetto ad un punto O arbitrario.

Velocità areolare L'area Ω spazzata dal raggio vettore $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ uscente da O nell'unità di tempo è chiamata *velocità areolare* valutata rispetto a O. Essa è proporzionale al modulo del momento angolare del punto materiale considerato:

$$\Omega = \frac{1}{2m}|\boldsymbol{L}|. \tag{33}$$

Quindi se un corpo è sottoposto a una forza centrale uscente da O la velocità areolare valutata rispetto a O rimane costante. Nel caso del moto dei pianeti attorno al Sole questa legge (approssimativamente vera) è nota come *seconda legge di Keplero*.