Derivazione elementare dell'espressione della quantità di moto e dell'energia in relativività ristretta

L. P.

22 Aprile 2015

Sommario

L'espressione della quantità di moto e dell'energia in relatività ristretta viene solitamente derivata in maniera non molto convincente, o perché coinvolge considerazioni elettrodinamiche, o richiede l'introduzione del concetto non elementare di quadrivettore, o perché si appoggia su considerazioni quantistiche, come quello della quantità di moto e dell'energia associata a un fotone di frequenza ν. Invece, seguendo considerazioni dovute a P. Epstein ed A. Einstein, e riprese da R. Feynman, è possibile ottenere una derivazione assolutamente elementare di queste espressioni, e della formula $E = mc^2$, basandosi esclusivamente sulle trasformazioni di Lorentz e sul postulato di conservazione della quantità di moto e dell'energia applicato all'urto di particelle puntiformi.

1 Introduzione

Esistono parecchi testi che propongono derivazioni elementari della cinematica della relatività ristretta, basate in ultima analisi sulla prima parte della memoria fondamentale di Einstein del 1905 [1]. Sulla base dei due postulati della assoluta equivalenza dei sistemi di riferimento inerziali, e della costanza della velocità della luce in tutti i riferimenti, è in effetti possibile ottenere facilmente l'espressione delle trasformazioni di Lorentz. Una derivazione particolarmente semplice si basa sul cosiddetto k-calcolo di H. Bondi [2], a sua volta basato sull'effetto Doppler. Tuttavia il passaggio dalla cinematica (le trasformazioni di Lorentz) alla dinamica, e in particolare alle espressioni relativistiche della quantità di moto e dell'energia, è spesso ottenuto facendo appello a concetti più sofisticati, come quello di quadrivettore, oppure introducendo considerazioni quantistiche.[1] D'altra parte lo stesso Einstein aveva ottenuto la relazione fra massa inerziale e contenuto di energia facendo esplicito appello all'elettrodinamica, e non basandosi esclusivamente sulle considerazioni cinematiche contenute nella prima parte della memoria del 1905, che richiedono soltanto la costanza della velocità della luce, ma non sono per altro basate sulle equazioni di Maxwell.

Einstein stesso aveva notato questa difficoltà, e nel 1935 aveva presentato una derivazione elementare dell'equivalenza fra massa ed energia indipendente dal suo argomento del 1905, motivandola con queste parole [4]:

> La teoria della relatività ristretta è cresciuta dalle equazione dell'elettrodinamica di Maxwell. Conseguentemente, anche nella derivazione dei concetti meccanici e delle loro relazioni la considerazione dei concetti corrispondenti del campo elettromagnetico ha giocato un ruolo essenziale. È naturale domandarsi se questi concetti sono indipendenti poiché la trasformazione di Lorentz, che è la vera base della relatività

[1] Ne è un esempio la "derivazione elementare" di F. Rohrlich [3], che fa appello all'espressione della quantità di moto e dell'energia di un fotone di frequenza ν.

ristretta, non ha in sé niente a che fare con le equazioni di Maxwell e perché non sappiamo fino a che punto i concetti energetici della teoria di Maxwell possano essere mantenuti di fronte ai dati della fisica molecolare.

Le considerazioni di Einstein si basano su un esperimento concettuale introdotto da G. N. Lewis e R. C. Tolman [5] e ripreso da P. S. Epstein [6], in cui si considera la descrizione di urti fra particelle in diversi sistemi di riferimento inerziali, e si cerca l'espressione della quantità di moto e dell'energia imponendone la conservazione. È interessante notare che l'articolo di Lewis e Tolman, così come quello di Epstein, si limitano a considerare urti elastici e a derivare l'espressione della quantità di moto relativistica, mentre derivano l'equivalenza fra massa ed energia, dalla considerazione della variazione della "massa relativistica" con la velocità. Einstein ottiene invece l'equivalenza fra massa ed energia semplicemente allargando l'argomento alla considerazione di urti anelastici. Quanto questo approccio sia utile per introdurre i concetti della relatività ristretta è stato ben notato da Feynman che, nelle sue *Lectures* [7, Vol. I. Secs. 16–4, 16–5], basa la derivazione delle espressioni della quantità di moto e dell'energia relativistiche su argomenti molto simili a quelli di Einstein. L'argomento di Einstein è stato analizzato in tempi relativamente recenti da F. Flores [8], che distingue tre affermazioni distinte all'interno dell'equivalenza massa-energia, e confronta l'argomento del 1935 con la derivazione originale del 1905 [1] e con la derivazione di M. Friedman [9, p. 142ff] del 1983, che si basa sulla considerazione delle equazioni di Newton in relatività ristretta.

In questa nota, riprendo questa linea di pensiero nella speranza che possa essere utile per presentare questi concetti fondamentali della relatività ristretta in corsi introduttivi per studenti di fisica e di matematica. La derivazione dell'espressione relativistica della quantità di moto discussa nel paragrafo 3 è vicina alla discussione di Epstein [6, § 4] e di Feynman [7, Vol. I. Secs. 16–4, 16–5], mentre la discussione dell'energia cinetica e dell'equivalenza massa-energia è più vicina all'argomento di Einstein [4].

2 Trasformazioni di Lorentz

Seguendo il lavoro di Einstein del 1905 [1, § 2], i concetti cinematici della relatività ristretta si basano sui seguenti postulati:

1. Le leggi che governano le trasformazioni dello stati dei sistemi fisici assumono la stessa forma in sistemi di riferimento che sono in moto traslatorio uniforme l'uno rispetto all'altro.

2. In ciascuno di questi sistemi di riferimento la luce possiede nel vuoto la stessa velocità c, indipendentemente dallo stato di moto della sorgente.

Sceglieremo d'ora in poi unità per cui $c = 1$. Sulla base di questi postulati è possibile derivare le trasformazioni di Lorentz nella forma seguente. Si considerino due sistemi di riferimento, K e K', tale che K' è animato di moto traslatorio uniforme nella direzione x e con velocità V rispetto a K. Allora l'evento di coordinate (t', x', y', z') in K' possiede in K le coordinate (t, x, y, z), dove

$$t = \gamma(V)(t' + Vx'); \tag{1a}$$
$$x = \gamma(V)(x' + Vt'); \tag{1b}$$
$$y = y'; \tag{1c}$$
$$z = z', \tag{1d}$$

e abbiamo definito

$$\gamma(V) = \frac{1}{(1 - V^2)^{1/2}}. \tag{2}$$

La stessa relazione vale per i differenziali $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}x$, ecc. Dividendo per $\mathrm{d}t$ si ottengono le regole di trasformazione delle velocità:

$$u_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{u'_x + V}{1 + u'_x V}; \tag{3a}$$

$$u_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{u'_y}{\gamma(V)(1 + u'_x V)}; \tag{3b}$$

$$u_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{u'_z}{\gamma(V)(1 + u'_x V)}. \tag{3c}$$

Per introdurre concetti dinamici abbiamo ovviamente bisogno di postulati supplementari. Introdurremo quindi i seguenti postulati:

3. La quantità di moto $\boldsymbol{P}$ e l'energia E di un punto materiale animato dalla velocità $\boldsymbol{u}$ nel sistema di riferimento K hanno rispettivamente l'espressione

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{u}\, F(u); \quad E = E_0 + m\, G(u), \tag{4}$$

   dove E_0 è una costante, m è una costante positiva (che non cambia se lo stato della particella cambia solo per cambiamenti della velocità) e che chiameremo *massa a riposo*, e $F(u)$ e $G(u)$ sono funzioni universali *monotonicamente crescenti* di $u = |\boldsymbol{u}|$.

4. Per $u \ll 1$ le espressioni si riducono a quelle della meccanica newtoniana. Si ha in particolare

$$F(u) = 1 + \mathrm{O}(u^2); \qquad G(u) = \frac{1}{2}u^2 + \mathrm{o}\left(u^2\right). \tag{5}$$

5. La quantità di moto totale $\boldsymbol{P}^{\mathrm{tot}}$ e l'energia totale E^{tot} di un sistema di più particelle sono rispettivamente la somma delle $\boldsymbol{P}$ ed E estesa a tutte le particelle del sistema.

6. **Conservazione della quantità di moto e dell'energia:** Supponiamo che in un sistema di più particelle avvengano degli urti (elastici o anelastici). Allora $\boldsymbol{P}^{\mathrm{tot}}$ e E^{tot} hanno lo stesso valore prima e dopo ciascun urto.

3 Urti elastici e conservazione della quantità di moto

Consideriamo adesso una *coppia di particelle*, cioè un sistema costituito da due particelle identiche (e che possiedono quindi lo stesso valore di m). Supponiamo che un sistema di riferimento K esse possiedano velocità opposte $\boldsymbol{u}_+$, $\boldsymbol{u}_- = -\boldsymbol{u}_+$, dove $\boldsymbol{u}_+ = (V, v, 0)$, con $|v| \ll V$, $V > 0$. Quindi $|\boldsymbol{u}^{\pm}| \simeq V$. Supponiamo inoltre che le due particelle collidano elasticamente, e possiedano dopo l'urto le velocità $\boldsymbol{w}_+ = (W, w, 0)$ e $\boldsymbol{w}_- = (W', w', 0)$. Per la conservazione della quantità di moto si deve avere $W' = -W$ e $w' = -w$, *indipendentemente dalla forma della funzione* $F(u)$. In effetti, prima dell'urto si ha $\boldsymbol{P}^{\mathrm{tot}}_{\mathrm{in}} = 0$. Per la legge di conservazione di deve avere

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{tot}}_{\mathrm{out}} = 0 = m\boldsymbol{w}_+\, F(w_+) + m\boldsymbol{w}_- F(w_-). \tag{6}$$

Quindi i vettori $\boldsymbol{w}_+$ e $\boldsymbol{w}_-$ sono paralleli, e si ha

$$\frac{|\boldsymbol{w}_+|}{|\boldsymbol{w}_-|} = \frac{F(w_-)}{F(w_+)}. \tag{7}$$

Dato che la funzione $F(u)$ è monotonicamente crescente, questa equazione può essere soddisfatta solo se $|\boldsymbol{w}_+| = |\boldsymbol{w}_-|$, e quindi si ha $\boldsymbol{w}_+ = -\boldsymbol{w}_-$. Adesso la conservazione dell'energia impone che

$w^{\pm} = u^{\pm}$. In effetti l'energia cinetica del sistema di particelle prima dell'urto è pari a $2mG(u)$, e dopo l'urto è pari a $2mG(w)$. Dato che $G(u)$ è una funzione monotonicamente crescente di u, questa condizione può essere soddisfatta solo se $w^{\pm} = u$.

Mettiamoci adesso nel caso particolare in cui $W = V$, cioè in cui l'urto avviene lungo l'asse y. Nel sistema di riferimento K_0 si abbia $\boldsymbol{u}_{\pm,0} = (\pm V_0, \pm v_0, 0)$ (cf. fig. 1). Consideriamo adesso lo stesso fenomeno, come descritto in un sistema di riferimento K che si muove rispetto a K_0 alla velocità V_0 nella direzione x. In questo sistema di riferimento, le velocità $\boldsymbol{u}_{\pm}$ delle particelle

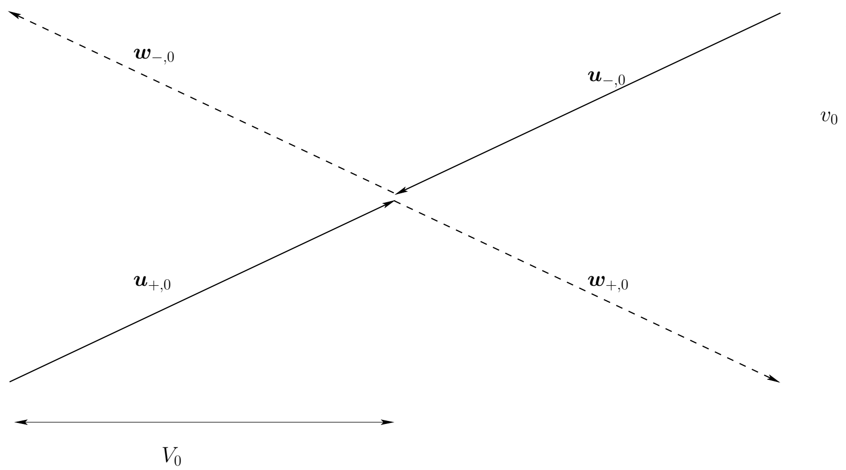

Figura 1: Urto di una coppia di particelle nel sistema di riferimento K_0.

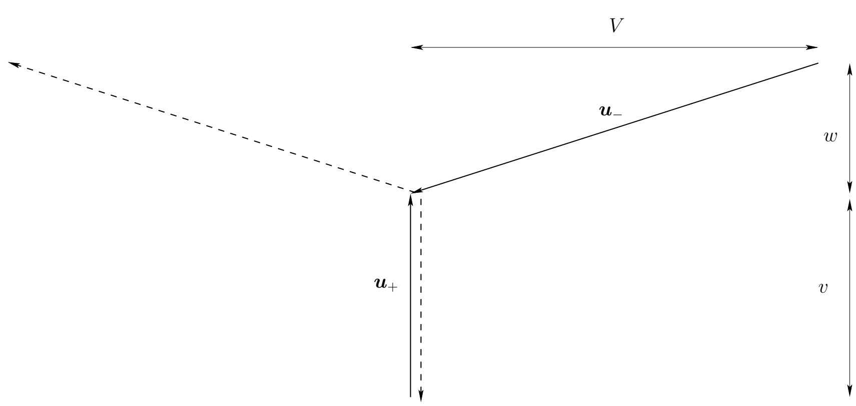

Figura 2: Urto di una coppia di particelle nel sistema di riferimento K.

sono rispettivamente date da

$$\boldsymbol{u}_{+} = (0, v, 0), \tag{8a}$$
$$\boldsymbol{u}_{-} = (-V, -w, 0), \tag{8b}$$

dove

$$V = \frac{2V_0}{1+V_0^2}, \tag{9a}$$

$$v = \frac{v}{\gamma(V_0)(1+V_0^2)}, \tag{9b}$$

$$w = \frac{v}{\gamma(V_0)(1-V_0^2)}. \tag{9c}$$

Si può facilmente controllare che

$$\gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} = \frac{1+V_0^2}{1-V_0^2}, \tag{10}$$

e quindi che

$$w = \frac{v}{\gamma(V)}. \tag{11}$$

Questo risultato può anche essere ottenuto applicando l'espressione (3) alla trasformazione da K a un sistema di riferimento K' che è animato, rispetto a K, da un moto traslatorio uniforme con velocità $-V$ diretta lungo l'asse x. In questo sistema di riferimento la componente x della velocità $\boldsymbol{u}_-$ si annulla, e quella della velocità $\boldsymbol{u}_+$ vale V, e conseguentemente i valori assoluti delle componenti y vengono scambiate fra le due particelle.

Consideriamo adesso la conservazione della quantità di moto. La variazione $\Delta\boldsymbol{P}_+$ della quantità di moto della particella "+" è data da

$$\Delta\boldsymbol{P}_+ = -2mv\,F(v)\,\boldsymbol{e}_y, \tag{12}$$

dove $\boldsymbol{e}_y$ è il versore dell'asse y. La quantità corrispondente per la particella "−" è data da

$$\Delta\boldsymbol{P}_- = 2mw\,F(u_-)\,\boldsymbol{e}_y, \tag{13}$$

dove $u_- = \sqrt{V^2+w^2}$. Supponiamo $v, w \ll 1$: allora $F(v) \simeq 1$ e $u_- \simeq V$. Dalla conservazione della quantità di moto otteniamo $\Delta\boldsymbol{P}_+ + \Delta\boldsymbol{P}_- = 0$, il che implica

$$mv = mwF(V). \tag{14}$$

Dato che $w = v/\gamma(V)$, otteniamo

$$\boxed{F(V) = \gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}} \tag{15}$$

Avendo ottenuto questa espressione per $v, w \ll 1$, è facile vedere che essa vale anche per valori più elevati di v e w, sostituendo a V il modulo della velocità della particella considerata. Si avrà in effetti

$$mv\,F(v) = mw\,F(u) = \frac{mv}{\gamma(V)}\,F(u), \tag{16}$$

da cui otteniamo

$$F(u) = F(v)\gamma(V), \tag{17}$$

cioè

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\frac{1}{\sqrt{1-V^2}}, \tag{18}$$

che si può facilmente verificare.

4 Conservazione dell'energia cinetica

Supponiamo che una particella sia animata dalla velocità $\boldsymbol{u}' = (u', 0, 0)$, parallela all'asse x, nel sistema di riferimento K'. La sua velocità $\boldsymbol{u}$ nel sistema di riferimento K, animato dalla velocità di traslazione $-V$ rispetto a K', è data da $\boldsymbol{u} = (u, 0, 0)$, con

$$u = \frac{u' + V}{1 + u'V}. \tag{19}$$

Si può facilmente vedere che

$$\gamma(u) = (1 + u'V)\,\gamma(u')\gamma(V). \tag{20}$$

Se $\boldsymbol{u}'$ non è parallela all'asse x, ma si ha $\boldsymbol{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$, si ha la relazione più generale

$$\gamma(u) = (1 + u'_x V)\gamma(u')\gamma(V), \tag{21}$$

che si ottiene con un po' di algebra. Incidentalmente, è anche facile vedere che si ha

$$u_x\gamma(u) = (u'_x + V)\gamma(u')\gamma(V); \tag{22a}$$
$$u_y\gamma(u) = u'_y\gamma(u')\gamma(V); \tag{22b}$$
$$u_z\gamma(u) = u'_z\gamma(u')\gamma(V). \tag{22c}$$

Consideriamo adesso una coppia di particelle che, nel sistema K' hanno velocità opposte $\boldsymbol{u}'_+$, $\boldsymbol{u}'_- = -\boldsymbol{u}'_+$. Dette $\boldsymbol{u}_+$, $\boldsymbol{u}_-$ le relative velocità nel sistema K, otteniamo

$$\gamma(u_+) + \gamma(u_-) = 2\gamma(u')\gamma(V). \tag{23}$$

Abbiamo visto che un urto elastico nel sistema K non può modificare il comune valore u' del modulo delle velocità delle particelle. Quindi il secondo membro di questa equazione non può variare. Questo implica che neanche il primo membro di questa equazione può variare nell'urto. Indicando con $\boldsymbol{w}_+$ e $\boldsymbol{w}_-$ le velocità delle particelle nel sistema K dopo l'urto, otteniamo

$$\gamma(u_+) + \gamma(u_-) = \gamma(w_+) + \gamma(w_-). \tag{24}$$

Come dice Einstein [4, p. 227], queste equazioni hanno la forma di leggi di conservazione. Questo suggerisce di interpretare $m(\gamma(u) - 1)$ come l'energia cinetica di una particella di massa m animata dalla velocità $\boldsymbol{u}$.[2] Questa quantità si annulla per $u \to 0$, e per piccoli valori di u vale

$$m\,(\gamma(u) - 1) \simeq \frac{1}{2}mu^2, \tag{25}$$

in accordo con il limite classico. Possiamo quindi porre

$$\boxed{G(u) = \gamma(u) - 1} \tag{26}$$

Notiamo inoltre che, applicando le relazioni (22) a una coppia di particelle, otteniamo

$$\boldsymbol{u}_+\gamma(u_+) + \boldsymbol{u}_-\gamma(u_-) = 2\boldsymbol{V}\gamma(u')\gamma(V). \tag{27}$$

Otteniamo così la seguente relazione:

$$\boldsymbol{u}_+\gamma(u_+) + \boldsymbol{u}_-\gamma(u_-) = \boldsymbol{w}_+\gamma(w_+) + \boldsymbol{w}_-\gamma(w_-), \tag{28}$$

che può essere interpretata come la legge di conservazione della quantità di moto. Riotteniamo così l'espressione relativistica della quantità di moto derivata nel paragrafo 3.

[2] Le equazioni (24) implicano la conservazione di $\gamma(u)$ + const. per una coppia di particelle. Bisogna porre const. $= -1$ per imporre che $G(u)$ si annulli per $u \to 0$.

5 Equivalenza di massa ed energia

Consideriamo adesso un urto totalmente anelastico fra una coppia di particelle. Per quanto abbiamo detto, nel sistema del centro di massa, l'energia cinetica prima dell'urto è data da

$$T' = 2m\left(\gamma(u') - 1\right). \tag{29}$$

L'energia cinetica dopo l'urto si annulla, ma l'energia della particella risultante è aumentata di una quantità pari a T'. Per la conservazione della quantità di moto, la particella risultante è in quiete nel sistema K' ed è quindi animata da una velocità $\boldsymbol{V}$ nel sistema K. Indichiamo con M la sua massa a riposo. Nel sistema K la quantità di moto prima dell'urto è data da

$$\boldsymbol{P} = m\left(\boldsymbol{u}_+\gamma(u_+) + \boldsymbol{u}_-\gamma(u_-)\right) = 2m\boldsymbol{V}\gamma(u')\gamma(V), \tag{30}$$

mentre dopo l'urto vale

$$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{V}\gamma(V). \tag{31}$$

Otteniamo così

$$M = 2m\gamma(u'). \tag{32}$$

Vediamo che la massa totale del sistema è aumentata di una quantità esattamente uguale all'energia cinetica "dissipata" nell'urto, trasformata cioè in altre forme d'energia. Questo permette di introdurre una scelta "naturale" della costante E dell'energia, ponendola uguale (nelle nostre unità) alla massa a riposo della particella, anche perché, "data la natura del concetto, [che] è determinato a meno di una costante additiva, si può stipulare che E_0 si annulli insieme con m" [4, p. 229]. Questo giustifica di considerare $m\gamma(u)$ come l'espressione dell'energia totale di una particella, e di associare alla trasformazione di una quantità δE di energia dalla forma cinetica ad un'altra forma con una variazione $\delta m = \delta E$ della massa a riposo della particella.

È da notare che le derivazioni qui riportate prescindono, oltre che dalle equazioni di Maxwell (mantenendone soltanto la costanza della velocità della luce) anche da alcuni concetti meccanici, come in particolare il concetto di forza, che è notoriamente problematico in relatività ristretta. Einstein critica l'utilizzazione del concetto di forza nella considerazione di urti fra particelle, contenuta nel libro di G. D. Birkhoff e R. E. Langer, *Relativity and Modern Physics*, [10] esattamente per questa ragione, come esplicitato nelle considerazioni conclusive di [4]:

> Nel libro appena menzionato si fa un uso essenziale del concetto di *forza*, che non ha nella teoria della relatività la stessa importanza che ha in meccanica classica. Questo dipende dal fatto che nella seconda si deve considerare la forza come una funzione data delle coordinate di tutte le particelle, il che non è evidentemente possibile nella teoria della relatività. Ho quindi evitato di introdurre il concetto di forza.
>
> Inoltre mi sono preoccupato di evitare ogni ipotesi relative alle proprietà di trasformazione della quantità di moto e dell'energia rispetto a una trasformazione di Lorentz.

Bibliografia

[1] A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, *Annalen der Physik* **17** 891–921 (1905).

[2] H. Bondi, *Relativity and common sense* (Dover ed.) (New York: Dover, 1980).

[3] F. Rohrlich, An elementary derivation of $E = mc^2$, *Am. J. Phys.* **58** 348–439 (1990).

[4] A. Einstein, Elementary derivation of the equivalence of mass and energy, *Am. Math. Soc. Bull.* **41** 223–230 (1935).

[5] G. N. Lewis e R. C. Tolman, The principle of relativity and non-Newtonian mechanics, *Phil. Mag.* **6** 510–523 (1909).

[6] P. S. Epstein, Über relativistische Statik, *Annalen der Physik* **36** 779–795 (1911).

[7] R. Feynman, R. Leighton and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics* (Boston: Addison-Wesley, 1964, 1966).

[8] F. Flores, Einstein's 1935 derivation of $E = mc^2$, *Stud. Hist. Philos. Mod. Phys.* **29**(2) 223–243 (1998).

[9] M. Friedman, *Foundations of Spacetime Theories* (Princeton, NJ: Princeton University Press, 1983).

[10] G. D. Birkhoff and R. E. Langer, *Relativity and Modern Physics*, (Cambridge, MA: Harvard University Press, 1923).