Teorema dell'energia cinetica

L. P.

23 Marzo 2010

Il teorema dell'energia cinetica

Il **teorema dell'energia cinetica** è una relazione molto importante in Meccanica. L'enunceremo nel caso semplice di un punto materiale soggetto a forze arbitrarie.

Definizione. *L'**energia cinetica** di un punto materiale di massa m, animato da una velocità $\boldsymbol{v}$ è la quantità K definita dall'espressione*

$$K = \frac{1}{2} m v^2.$$

Segue da questa definizione, e dal fatto che $m > 0$, che l'energia cinetica di un punto materiale *non può mai essere negativa.*

Supponiamo adesso che all'istante t il punto materiale sia sottoposto a diverse forze, la cui risultante è $\boldsymbol{f}_{\mathrm{ris}}$. Consideriamo adesso l'incremento $\mathrm{d}K$ subìto dall'energia cinetica in un piccolo intervallo di tempo di durata $\mathrm{d}t$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \mathrm{d}K &= m\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \left(m \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t = m\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}t \\ &= \boldsymbol{f}_{\mathrm{ris}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \end{aligned} \tag{1}$$

Per ottenere questa relazione, abbiamo sfruttato il secondo principio della dinamica, $\boldsymbol{f}_{\mathrm{ris}} = m\boldsymbol{a}$, e il fatto che, nel piccolo intervallo di tempo di durata $\mathrm{d}t$, lo spostamento subìto dal corpo considerato è pari a

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}t. \tag{2}$$

La quantità a secondo membro della (1) è il **lavoro infinitesimo** compiuto sul corpo dalla forza risultante durante il piccolo intervallo di tempo considerato.

Questo ci permette di introdurre la seguente definizione del **lavoro di una forza**.

Definizione. *Il **lavoro** compiuto da una forza $\boldsymbol{f}$ su un punto materiale durante un piccolo intervallo di tempo, in cui esso subisce lo spostamento infinitesimo $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, è pari la prodotto scalare di $\boldsymbol{f}$ e di $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$:*

$$\mathrm{d}L = \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

Possiamo quindi enunciare nel modo seguente il risultato che abbiamo ottenuto più sopra:

Teorema. *La variazione dell'energia cinetica subìta da un punto materiale durante un piccolo intervallo di tempo, è pari al lavoro infinitesimo compiuto su di esso dalla forza risultante ad esso applicata.*

Consideriamo adesso un intervallo di tempo finito $[t_{\mathrm{i}}, t_{\mathrm{f}}]$, durante il quale, sotto l'azione della forza risultante $\boldsymbol{f}_{\mathrm{ris}}(t)$, il corpo si muove secondo la legge oraria $\boldsymbol{r}(t)$. Allora il **lavoro** L compiuto dalla forza risultante sul corpo considerato durante questo intervallo di tempo è la quantità che ha per espressione

$$L = \int_{t_{\mathrm{i}}}^{t_{\mathrm{f}}} \boldsymbol{f}_{\mathrm{ris}}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t)\, \mathrm{d}t = \int_{t_{\mathrm{i}}}^{t_{\mathrm{f}}} \boldsymbol{f}_{\mathrm{ris}}(t) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}(t), \tag{3}$$

pari all'integrale del lavoro infinitesimo esteso all'intervallo di tempo considerato.

Integrando $\mathrm{d}K$ fra l'istante iniziale t_{i} e quello finale t_{f} otteniamo l'incremento totale dell'energia cinetica $\Delta K = K(t_{\mathrm{f}}) - K(t_{\mathrm{i}})$. Facendo uso del teorema ottenuto più sopra e della definizione di lavoro, otteniamo il

Teorema dell'energia cinetica. *La variazione ΔK dell'energia cinetica di un punto materiale sottoposto a forze di risultante pari a $\boldsymbol{f}_{\mathrm{ris}}(t)$ durante un intervallo di tempo $[t_{\mathrm{i}}, t_{\mathrm{f}}]$ è uguale al lavoro compiuto su di esso dalla forza risultante durante quell'intervallo di tempo.*

COMMENTO. Possiamo fare le seguenti osservazioni:

1. Se su un punto materiale agiscono diverse forze, in modo che $\boldsymbol{f}_{\mathrm{ris}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i$, allora il lavoro della forza risultante è uguale alla somma dei lavori effettuati dalle singole forze. Si ha cioè
$$L = \sum_{i=1}^{n} L_i,$$
dove
$$L_i = \int_{t_{\mathrm{i}}}^{t_{\mathrm{f}}} \boldsymbol{f}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$
2. Se lo spostamento subìto dal corpo è istante per istante ortogonale alla forza $\boldsymbol{f}_i$, allora il corrispondente lavoro L_i è nullo. In effetti, in tale caso, si ha $\boldsymbol{f}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$. Per esempio, se il corpo è animato di moto circolare uniforme, la forza risultante è centripeta, ed è sempre diretta lungo il raggio, quindi normalmente alla velocità che è diretta lungo la tangente. Quindi la forza risultante non compie lavoro, coerentemente con il fatto che il modulo della velocità, e quindi l'energia cinetica, non varia. Analogamente, se il corpo è sottoposto a dei vincoli lisci indipendenti dal tempo (p.es., scivola su di un piano inclinato) le forze vincolari, essendo normali alla superficie e quindi alla traiettoria, non compiono lavoro.
3. Se lo spostamento subìto dal corpo ha una componente parallela e concorde alla forza risultante, si ha $\boldsymbol{f}_{\mathrm{ris}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} > 0$, e l'energia cinetica aumenta; viceversa, se la componente parallela è opposta alla forza risultante, l'energia cinetica diminuisce. Più in generale, se la componente della forza nella direzione della velocità è concorde con essa, tende ad aumentare l'energia cinetica del corpo; se è diretta in verso opposto, tende a diminuirla. In particolare, le forze di attrito dinamico e di resitenza del mezzo sono sempre dirette in verso opposto alla velocità, e tendono quindi a diminuire l'energia cinetica del corpo che le subisce. Questo giustifica il loro nome di **forze dissipative**.

Moto unidimensionale con forze dipendenti dalla posizione

Consideriamo un punto materiale che si muove su una traiettoria rettilinea (che faremo coincidere con l'asse x), e sottoposto a forze che dipendono soltanto dalla posizione. Consideriamo l'intervallo di tempo $[t_{\mathrm{i}}, t_{\mathrm{f}}]$, in cui il moto è descritto dalla legge oraria $x(t)$. In questa situazione le forze applicate al corpo sono anch'esse dirette lungo l'asse x, e il lavoro ha per espressione
$$L = \int_{t_{\mathrm{i}}}^{t_{\mathrm{f}}} f_{\mathrm{ris}}(x(t)) \, \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}t. \tag{4}$$
Poiché
$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}t = \mathrm{d}x,$$
possiamo cambiare variabile d'integrazione da t a x, ottenendo
$$L = \int_{x_{\mathrm{i}}}^{x_{\mathrm{f}}} f_{\mathrm{ris}}(x) \, \mathrm{d}x. \tag{5}$$
Quindi il lavoro compiuto dalle forze applicate dipende soltanto dalle posizioni iniziale e finale del corpo durante l'intervallo di tempo considerato. Possiamo esprimerlo nella forma seguente: sia $-U(x)$ una primitiva di $f_{\mathrm{ris}}(x)$:
$$-\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x} = f_{\mathrm{ris}}(x). \tag{6}$$
Allora
$$L = \int_{x_{\mathrm{i}}}^{x_{\mathrm{f}}} f_{\mathrm{ris}}(x) \, \mathrm{d}x = U(x_{\mathrm{i}}) - U(x_{\mathrm{f}}), \tag{7}$$

dove

$$x_{\mathrm{i,f}} = x(t_{\mathrm{i,f}}). \tag{8}$$

Il teorema dell'energia cinetica implica dunque che

$$K_{\mathrm{f}} - K_{\mathrm{i}} = U(x_{\mathrm{i}}) - U(x_{\mathrm{f}}), \tag{9}$$

ovvero

$$K_{\mathrm{f}} + U(x_{\mathrm{f}}) = K_{\mathrm{i}} + U(x_{\mathrm{i}}). \tag{10}$$

Poiché t_{f} e t_{i} sono arbitrari, otteniamo il risultato che

$$K(t) + U(x(t)) = E = \text{const.} \tag{11}$$

Abbiamo quindi individuato una quantità che si mantiene costante durante il moto del corpo. Questa quantità è chiamata l'**energia meccanica**, ed è costituita dalla somma dell'energia cinetica K e di $U(x)$, che è chiamata **energia potenziale**. Possiamo enunciare questo risultato nella forma del seguente

Teorema. *Se un corpo sottoposto a forze dipendenti solo dalla posizione si muove lungo una traiettoria rettilinea, la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale si mantiene costante.*

Possiamo adesso generalizzare leggermente questo risultato, considerando un punto materiale vincolato a muoversi lungo una traiettoria fissa, non necessariamente rettilinea. In questo caso, il corpo è sottoposto anche a delle forze vincolari, che dipenderanno in generale dalla velocità. Per esempio, se il corpo si muove lungo una traiettoria circolare di raggio r ed è animato da una velocità di modulo pari a v, esso sarà sottoposto a una forza diretta verso il centro della traiettoria e di modulo pari a mv^2/r. *Supporremo tuttavia che i vincoli siano lisci e fissi*, per cui le forze vincolari, essendo sempre ortogonali allo spostamento del corpo, *non compiano lavoro.* In questa situazione, il lavoro della forza risultante è uguale al lavoro della forza applicata, che abbiamo supposto dipendere solo dalla posizione. Indichiamo quindi con x la coordinata curvilinea lungo la traiettoria, e con $f(x)$ la componente della forza applicata tangente alla traiettoria stessa. L'energia pontenziale ha quindi per espressione

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x' f(x'), \tag{12}$$

dove x_0 è un "punto iniziale" scelto arbitrariamente. Poiché le forze vincolari non compiono lavoro, l'energia meccanica

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) \tag{13}$$

si mantiene costante durante il moto.

Applicazioni

Forza-peso

Consideriamo un corpo sottoposto alla forza-peso, inizialmente in quiete o dotato di una velocità verticale (verso l'alto o il basso). Poniamo l'asse z in coincidenza con la sua posizione iniziale, e diretto verticalmente verso l'alto. Quindi z è la quota del punto valutata a partire dall'origine. Allora la sola componente non nulla della forza-peso è pari a $-mg$. Dalla definizione di energia potenziale otteniamo

$$U(z) = -\int_{z_0}^{z} \mathrm{d}z' \, (-mg) = mg\,(z - z_0)\,. \tag{14}$$

Scegliendo $z_0 = 0$ otteniamo l'espressione dell'energia potenziale per la forza-peso:

$$U(z) = mgz, \tag{15}$$

dove z è la quota.

Per la conservazione dell'energia meccanica, si ha

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = E = \text{const.}, \tag{16}$$

dove $v = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$. Per esempio, se il corpo si trova inizialmente in quiete ad una quota $x = h$, quando passerà per l'origine sarà animato dalla velocità v che soddisfa la condizione

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg \cdot 0 = E = \frac{1}{2}m \cdot 0^2 + mgh, \tag{17}$$

per cui

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{18}$$

Analogamente si può ottenere la quota massima h_0 a cui arriva un corpo lanciato dall'origine con una velocità v_0 diretta verticalmente verso l'alto. L'espressione dell'energia iniziale è

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2. \tag{19}$$

Nel punto più alto della traiettoria si ha $v = 0$, $z = h_0$, per cui l'energia meccanica vale

$$E_1 = mgh_0. \tag{20}$$

Uguagliando E_0 ed E_1 otteniamo

$$h_0 = \frac{v_0^2}{2g}. \tag{21}$$

Più in generale, la conservazione dell'energia meccanica nella forma su riportata ha luogo anche se il corpo è vincolato a muoversi da vincoli lisci su una curva prefissata (indipendente dal tempo). Supponiamo per esempio che il corpo debba muoversi lungo una traiettoria circolare di raggio R disposta su un piano verticale. Se v_0 è la velocità di cui esso è animato nel punto più basos della traiettoria, esso arriverà ad un'altezza h_0 data dalla (21) fin tanto che $h_0 < 2R$, cioè $v_0 < 2\sqrt{gR}$. Altrimenti esso continuerà a muoversi, e passerà per il punto più alto della traiettoria con una velocità v data da

$$v = \sqrt{v_0^2 - 4gR}. \tag{22}$$

Oscillatore armonico

Consideriamo adesso un corpo che si muove lungo l'asse x, soggetto a una forza elastica di costante di Hooke k che lo richiama verso l'origine:

$$f(x) = -kx. \tag{23}$$

Un semplice calcolo ci dà l'espressione dell'energia potenziale:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2. \tag{24}$$

L'energia meccanica ha quindi per espressione

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2. \tag{25}$$

Mostriamo che questa quantità è effettivamente costante per un corpo animato di moto armonico, descritto dall'espressione

$$x(t) = A\cos\left(\omega t - \phi\right), \tag{26}$$

dove la frequenza angolare ω soddisfa la relazione

$$\omega^2 = \frac{k}{m}. \tag{27}$$

Si ha

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin\left(\omega t - \phi\right). \tag{28}$$

Otteniamo così

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2\left(\omega t - \phi\right) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2\left(\omega t - \phi\right) = A^2k^2, \tag{29}$$

dove abbiamo sfruttato la (27) e l'identità $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $\forall x$.

Osservazioni sull'energia potenziale

Indeterminazione dell'energia potenziale

La funzione energia potenziale $U(x)$ è definita dalla relazione

$$f(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}. \tag{30}$$

Se si aggiunge una costante C a $U(x)$, essa non modifica l'espressione della forza $f(x)$, perché la derivata di una costante è nulla. *Quindi l'energia potenziale è definita a meno di una costante additiva.* In effetti, l'energia potenziale è la primitiva della funzione $-f(x)$, e sappiamo che la funzione primitiva è definita a meno di una costante additiva. Possiamo quindi, in particolare, scegliere la costante additiva imponendo, per esempio, che l'energia potenziale si annulli in un punto da noi scelto.

Velocità ed energia potenziale

La conoscenza della funzione $U(x)$ permette di risolvere molto semplicemente dei problemi che richiederebbero la risoluzione delle equazioni del moto (che spesso non è disponibile in forma analitica).

Supponiamo che a un certo istante il corpo si trovi nel punto di ascissa x_0, animato dalla velocità v_0, mentre ad un altro istante esso passi per il punto di ascissa x. Vogliamo conoscere il modulo della velocità di cui esso è animato quando passa per x.

Per risolvere questo problema, esprimiamo la conservazione dell'energia meccanica. Nell'istante iniziale, quando il corpo si trova in x_0, essa vale

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0). \tag{31}$$

Nell'istante generico x, in cui il corpo si trova nel punto di ascissa x ed è animato dalla velocità v, l'energia meccanica vale

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x). \tag{32}$$

Imponiamo la condizione di conservazione dell'energia meccanica: $E = E_0$. Otteniamo

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0) = \frac{1}{2}mv^2 + U(x). \tag{33}$$

Risolvendo rispetto a v otteniamo

$$v = \sqrt{(U(x_0) + mv_0^2/2) - U(x)}. \tag{34}$$

Poiché v è il *modulo* di $\boldsymbol{v}$, occorre prendere la determinazione positiva della radice.

Nel caso particolare in cui $U(x) = mgx$, riotteniamo le espressioni derivate più sopra.

Moto lungo una curva prefissata

Consideriamo il caso di un punto materiale di massa m, vincolato a muoversi lungo una curva liscia descritta, p.es., dall'equazione $z = z(x)$, e sottoposto alla forza-peso. Poiché la forza esercitata dai vincoli è sempre diretta ortogonalmente allo spostamento, il lavoro della forza risultante compiuto sul corpo in un certo intervallo di tempo $[t_{\mathrm{i}}, t_{\mathrm{f}}]$ è uguale alla differenza $mg\,(z(x_{\mathrm{i}}) - z(x_{\mathrm{f}})) = U(x_{\mathrm{i}}) - U(x_{\mathrm{f}})$ dell'energia potenziale agli estremi della traiettoria percorsa in quest'intervallo. Quindi, se la velocità iniziale vale, p.es., v_{i}, il modulo della velocità con cui esso passa per il punto generico x vale

$$v = \sqrt{(U(x_{\mathrm{i}}) + mv_{\mathrm{i}}^2/2) - U(x)}. \tag{35}$$

Tuttavia, poiché in questo caso la traiettoria non coincide con l'asse delle x, non è vero che $v = |\mathrm{d}x/\mathrm{d}t|$. In effetti in questo caso la velocità ha, oltre la componente x, anche la componente z. Per valutarla, consideriamo che il vettore posizione $\boldsymbol{r}(t)$ ha per espressione

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), 0, z(x(t)))\,, \tag{36}$$

dove, come abbiamo visto, $z(x)$ è il profilo della traiettoria a cui è vincolato il corpo. La componente y è sempre nulla nelle nostre ipotesi e sarà omessa da adesso in poi. Prendendo la derivata di questa espressione rispetto al tempo, otteniamo il vettore velocità:

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right), \tag{37}$$

dove abbiamo sfruttato la regola della derivata di funzione di funzione. Quindi il modulo del vettore velocità è dato da

$$v = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2} = \left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}. \qquad (38)$$

Questa è l'espressione che compare nella valutazione dell'energia cinetica.

Equilibrio stabile e instabile

Un **punto d'equilibrio** è un punto in cui la forza applicata (che si suppone dipendere solo dalla posizione) si annulla. Se un punto materiale è posto inizialmente con velocità nulla in un punto d'equilibrio, esso rimane in quiete, dato che la sua accelerazione è nulla. Consideriamo ora un punto materiale vincolato a muoversi lungo l'asse x, e sottoposto a una forza applicata definita dalla funzione energia potenziale $U(x)$: I punti di equilibrio sono quelli in cui la forza applicata si annulla, e quindi sono gli **estremali** di $U(x)$, cioè i punti in cui la derivata di $U(x)$ si annulla. Consideriamo uno di tali punti, x_0 e consideriamo il comportamento di $U(x)$ attorno a questo punto. Si avrà

$$U(x) = U(x_0) + \frac{1}{2}k\,(x - x_0)^2 + \text{termini di ordine superiore.} \qquad (39)$$

In questa espressione,

$$k = \left.\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}, \qquad (40)$$

è la derivata seconda di U fatta rispetto ad x e valutata nel punto d'equilibrio. Nei casi più frequenti, questa derivata non si annulla in x_0. Se essa è positiva, $U(x)$ presenta un minimo in x_0; se è negativa, $U(x)$ presenta un massimo.

Discutiamo il comportamento di un punto materiale posto inizialmente in prossimità di un punto d'equilibrio x_0, e con un valore dell'energia meccanica leggermente superiore al valore $U(x_0)$ ivi assunto dall'energia potenziale.

Minimo: Supponiamo che x_0 corrisponda a un punto di minimo locale di $U(x)$, e sia $E = U(x_0) + \Delta E$ il valore dell'energia meccanica del punto materiale considerato. Poiché l'energia cinetica non può essere negativa, il corpo potrà muoversi soltanto entro la regione in cui la differenza $E - U(x)$ è positiva. Per piccoli valori di ΔE, potendosi trascurare i termini di ordine superiore nella (39), questa condizione assume la forma

$$\Delta E \geq \frac{1}{2}k\,(x - x_0)^2\,. \qquad (41)$$

In queste condizioni, il moto del corpo sarà limitato a un intorno del punto d'equilibrio x_0, intorno tanto più piccolo quanto più piccola è la differenza $\Delta E = E - U(x_0)$. In questa situazione, il punto d'equilibrio x_0 è un **punto d'equilibrio stabile**: una piccola perturbazione della condizione iniziale del corpo dall'equilibrio rimane limitata e (come vedremo) il corpo si limita a compiere delle piccole oscillazioni attorno al punto d'equilibrio.

Massimo: Se invece il punto x_0 corrisponde a un punto di massimo locale di $U(x)$, e se il corpo è dotato inizialmente di un'energia meccanica anche leggermente superiore a $U(x_0)$, nulla impedirà al corpo di allontanarsi arbitrariamente da x_0. In questo caso, una piccola perturbazione dall'equilibrio verrà amplificata dall'evoluzione del corpo. Il punto d'equilibrio x_0 è detto allora **punto d'equilibrio instabile**.

Piccole oscillazioni attorno a un punto d'equilibrio stabile

Consideriamo adesso il caso di un punto materiale di massa m che si muove su una traiettoria rettilinea in prossimità di un punto d'equilibrio stabile x_0. Utilizzando l'espressione (39) dell'energia potenziale in prossimità del punto x_0 e la relazione (30) che esprime la forza in funzione dell'energia potenziale, otteniamo (trascurando i termini di ordine superiore nella (39))

$$f(x) = -k(x - x_0), \qquad (42)$$

dove, nell'ipotesi fatta che x_0 sia un punto di equilibrio stabile, si ha

$$k > 0. \qquad (43)$$

Poniamo l'origine dell'asse x in x_0: si ha allora

$$f(x) = -kx, \tag{44}$$

esattamente come per una forza elastica di costante di Hooke pari a κ. Possiamo quindi scrivere l'equazione del moto soddisfatta dal corpo in prossimità del punto x_0:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx. \tag{45}$$

Questa è l'equazione del moto di un oscillatore armonico di frequenza angolare ω, definita da

$$\omega^2 = \frac{k}{m}. \tag{46}$$

Notiamo che la validità di questa equazione dipende dall'ipotesi fatta che il moto rimanga circoscritto ad un intorno del punto d'equilibrio abbastanza piccolo, così che i termini d'ordine superiore nello sviluppo (39) possano essere trascurati. Questa ipotesi è tanto più vera quanto più piccola è la differenza $\Delta E = E - U(x_0)$.

Possiamo quindi concludere che *un punto materiale in prossimità di un punto di equilibrio stabile, e dotato di un valore di energia meccanica prossima al valore dell'energia potenziale in quel punto, compie piccole oscillazioni armoniche attorno al punto d'equilibrio, con una frequanza angolare data dalla (46), dove k è la derivata seconda di U fatta rispetto ad x valutata nel punto d'equilibrio.*