Il moto circolare uniforme

L. P.

20 Dicembre 2009

Il **moto circolare uniforme** è il moto di un punto materiale su una traiettoria circolare, in cui il modulo della velocità è indipendente dal tempo. Si tratta di un **moto vario**, in cui il corpo subisce un'accelerazione dipendente dal tempo, dato che la velocità vettoriale varia con il tempo. Esso è anche un **moto periodico**, perché il corpo ripercorre le stesse posizioni a tempi successivi che differiscono fra loro di multipli di un tempo caratteristico T detto **periodo**.

In **coordinate polari**, avendo scelto come origine delle coordinate il centro O della traiettoria circolare, esso è descritto dalle equazioni del moto

$$r(t) = R; \qquad \theta(t) = \theta_0 + \omega t. \tag{1}$$

In queste equazioni, R è il raggio della traiettoria, ω è chiamata la **velocità angolare**, e θ_0 è una costante che dipende dalle condizioni iniziali. Dato che angoli che differiscono fra di loro di un multiplo dell'**angolo giro** (360°) corrispondono alla stessa posizione, la posizione del punto sarà la stessa in tempi che differiscono di multipli del periodo T espresso da

$$T = \frac{360}{\omega}, \tag{2}$$

se gli angoli sono misurati in gradi.

L'inverso del periodo è chiamato **frequenza** e si misura in hertz (indicato da Hz). Un moto circolare ha la frequenza di f hertz se percorre f cicli in un secondo. Si ha allora, se gli angoli sono misurati in gradi,

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{360}. \tag{3}$$

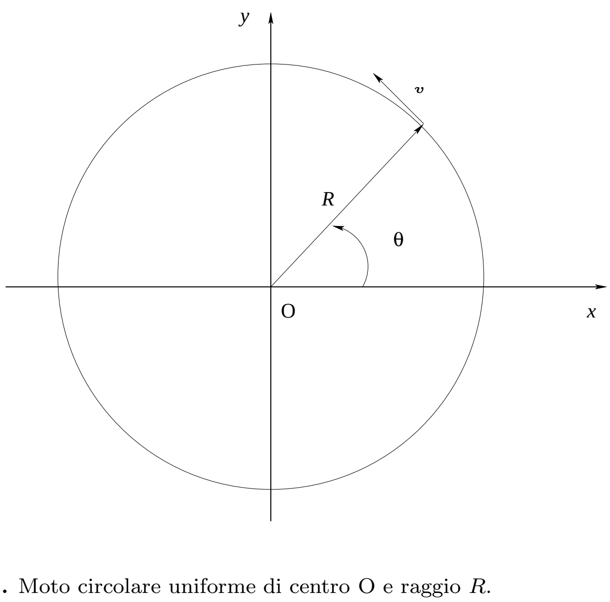

Figura 1. Moto circolare uniforme di centro O e raggio R.

In un moto circolare uniforme caratterizzato dal raggio R della traiettoria e dalla velocità angolare ω, in un piccolo intervallo di tempo di durata Δt, il corpo percorre un arco di cerchio che sottende un angolo di ampiezza $\Delta\theta = \omega\,\Delta t$ al centro. La lunghezza di quest'arco è pari a $\Delta\ell = 2\pi R\,\Delta\theta/360 = 2\pi R\omega\,\Delta t/360$. Quindi il modulo v della velocità di cui è animato il corpo è pari a

$$v = \frac{\Delta\ell}{\Delta t} = 2\pi R\,\frac{\omega}{360}. \tag{4}$$

Le formule si semplificano se gli angolo sono misurati in **radianti**. Il **radiante** è l'angolo che sottende, su una circonferenza di raggio R, un arco di lunghezza pari a R. Poiché la lunghezza della circonferenza è pari a $2\pi R$, dove $\pi = 3,141592\ldots$ è il rapporto della circonferenza al diametro, l'angolo giro è pari a 2π. Si ha inoltre $\Delta\ell = R\,\Delta\theta = \omega\,\Delta t$. Quindi, se ω è misurato in radianti al secondo, il modulo v della velocità è dato da

$$v = \omega R, \tag{5}$$

e il periodo T è dato da

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{6}$$

L'accelerazione nel moto circolare uniforme

Sebbene il *modulo* della velocità $\boldsymbol{v}$ di cui è animato un corpo in un moto circolare uniforme rimanga costante nel tempo, la sua direzione varia. Quindi il corpo *subisce un'accelerazione.* In questo paragrafo discuteremo le proprietà di questa accelarazione, e dimostreremo che:

- Essa è diretta verso il centro della traiettoria circolare (per cui è spesso chiamata **accelerazione centripeta**);
- Il suo modulo è dato da $a = \omega^2 R$, dove la velocità angolare ω è misurata in radianti al secondo.

Nel moto circolare uniforme il modulo v della velocità $\boldsymbol{v}$ è costante e pari a ωR, se gli angoli sono misurati in radianti. Mostriamo adesso che la direzione del vettore velocità $\boldsymbol{v}$ è parallela in ciascun punto alla tangente alla traiettoria. Supponiamo che ad un certo istante t il corpo si trovi nel punto P sulla circonferenza di raggio R. Ad un successivo istante $t + \Delta t$ (dove Δt è piccolo), esso si troverà nel punto P′. Lo spostamento $\Delta\boldsymbol{r}$ subìto dal corpo nell'intervallo di tempo di durata Δt è rappresentato dal vettore $\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$. La velocità media in questo intervallo di tempo sarà data quindi da $\overline{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\mathrm{PP'}}/\Delta t$. Questo vettore forma con il raggio OP un angolo prossimo a 90°.

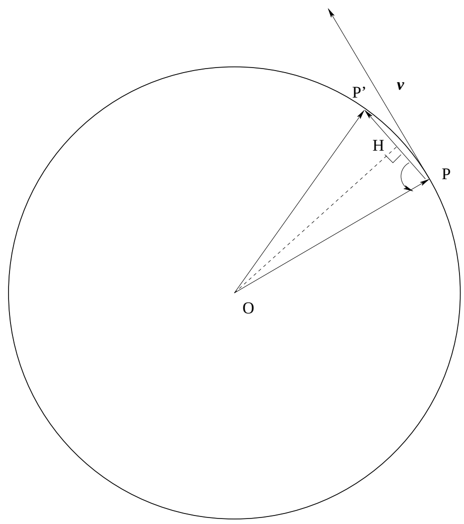

Figura 2. La direzione di $\boldsymbol{v}$ è, in ogni punto P, perpendicolare al raggio OP, e parallela alla tangente in P alla traiettoria.

In effetti il triangolo OPP′ è isoscele, perché $\overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{OP'}}$. Il segmento PP′ è perpendicolare all'altezza OH di questo triangolo: ma, dato che l'angolo al vertice $\angle\mathrm{POP'}$ è molto piccolo, i due angoli alla base $\angle \mathrm{OPP}'$ e $\angle \mathrm{OP}'\mathrm{P}$ sono uguali e molto vicini ad un angolo retto. Questo diventa sempre più vero quando Δt diventa sempre più piccolo. Quindi la direzione di $\boldsymbol{v}$ è, in ogni punto P, perpendicolare al raggio OP, e parallela alla tangente in P alla traiettoria.

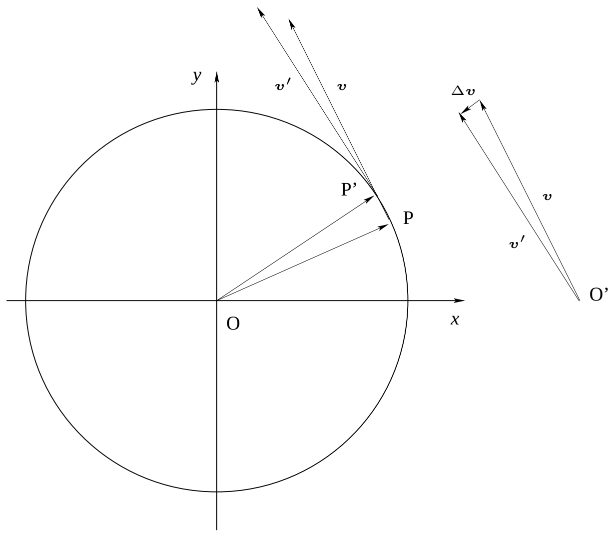

Figura 3. Variazione della velocità $\boldsymbol{v}$ in un piccolo intervallo di tempo nel moto circolare uniforme. All'inizio di un breve intervallo di tempo di durata Δt il corpo si trova in P, ed è animato dalla velocità $\boldsymbol{v}$ di modulo $v = \omega R$. Alla fine di questo intervallo, il corpo si trova in P$'$, ed è animato dalla velocità $\boldsymbol{v}'$. L'angolo fra $\boldsymbol{v}'$ e $\boldsymbol{v}$ è pari a $\Delta\theta = \omega\,\Delta t$. Il modulo della variazione di velocità Δv è approssimativamente uguale alla lunghezza dell'arco di raggio v sotteso da un angolo pari a $\Delta\theta$. Si ha $\Delta v = v\omega\,\Delta t$, per cui $a \simeq \Delta v/\Delta t = \omega v = \omega^2 R$.

Consideriamo adesso la variazione della velocità $\boldsymbol{v}$ in un breve intervallo di tempo di durata Δt. In questo intervallo di tempo il punto percorre un'arco di cerchio sotteso da un angolo $\Delta\theta = \omega\,\Delta t$. Questo è anche l'angolo formato da i due raggi OP e OP$'$, dove P e P$'$ sono le posizioni del punto all'inizio e alla fine dell'intervallo e O è il centro della traiettoria. Poiché la velocità $\boldsymbol{v}$ è in ogni istante perpendicolare al raggio relativo alla posizione istantanea del punto, anche le velocità $\boldsymbol{v}'$ alla fine dell'intervallo e $\boldsymbol{v}$ al suo inizio formano un angolo $\Delta\theta$.

La differenza $\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}$ è uguale, in modulo, alla lunghezza di una corda di una circonferenza di raggio v che sottende un angolo pari a $\Delta\theta$. Se $\Delta\theta$ è molto piccolo, essa è approssimativamente uguale alla lunghezza dell'arco corrispondente, che vale $v\,\Delta\theta$. Poiché $\Delta\theta = \omega\,\Delta t$, abbiamo $\Delta v \simeq v\omega\,\Delta t$. Dividendo per Δt, otteniamo il modulo dell'accelerazione $\boldsymbol{a}$:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = v\omega = \omega^2 R. \tag{7}$$

Per lo stesso motivo per cui la velocità del moto circolare è istante per istante perpendicolare al raggio, l'accelerazione $\boldsymbol{a}$ è istante per istante perpendicolare alla velocità. Essa è quindi, istante per istante, parallela la raggio. Si può vedere che la direzione la variazione della velocità è (per piccoli valori di Δt) diretta verso l'interno della traiettoria: quindi l'accelerazione $\boldsymbol{a}$ è istante per istante diretta verso il centro della traiettoria, e vale in modulo $a = \omega^2 R = v^2/R$. Data la sua direzione, essa viene detta **accelerazione centripeta**.