

# Condensazione di Einstein in un potenziale armonico

L. P.

28 agosto 2015

## 1 Numero di vettori interi con somma fissata

Vogliamo calcolare il numero di vettori  $d$ -dimensionali con elementi interi non negativi la cui somma ha un valore fissato  $n$ :

$$\mathcal{N}_d(n) = \sum_{k_1, \dots, k_d} \delta_{\sum_i k_i, n}. \quad (1)$$

Definiamo la funzione generatrice  $\Gamma_d(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathcal{N}_d(n)$ . Si ha

$$\Gamma_d(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1, \dots, k_d} \delta_{\sum_i k_i, n} z^n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)^d = \frac{1}{(1-z)^d}. \quad (2)$$

Quindi, per il teorema di Newton, si ha

$$\mathcal{N}_d(n) = (-1)^d \binom{-d}{n} = \frac{d(d+1) \cdots (d+n-1)}{n!}. \quad (3)$$

Perciò  $\mathcal{N}_d(n)$  è un polinomio in  $n$  di grado  $d-1$ . Si ha in particolare

$$\mathcal{N}_2(n) = n+1; \quad (4)$$

$$\mathcal{N}_3(n) = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (5)$$

## 2 Funzione di partizione gran canonica

Consideriamo un sistema di bosoni di massa  $m$  in un potenziale armonico  $d$ -dimensionale

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2, \quad (6)$$

nell'ensemble gran canonico.

Gli stati di singola particella sono identificati da un vettore  $d$ -dimensionale di interi non negativi  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d)$  la cui energia è data da

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \hbar \omega_0 \left( \sum_{i=1}^d k_i + \frac{d}{2} \right). \quad (7)$$

Quindi la funzione di partizione gran canonica a temperatura  $T$  e potenziale chimico  $\mu$  è data da

$$\ln Z = - \sum_{\mathbf{k}} \ln \left[ 1 - e^{-(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)/k_B T} \right]. \quad (8)$$

Il numero medio di particelle è dato da

$$N = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{e^{-(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)/k_{\text{B}}T} - 1}. \quad (9)$$

Il potenziale chimico  $\mu$  deve soddisfare la condizione

$$\mu \leq d \frac{\hbar\omega_0}{2} = \mu_0. \quad (10)$$

Quando  $\mu \rightarrow \mu_0$ , il termine corrispondente a  $\mathbf{k} = (0, \dots, 0)$  nella somma (9) diverge. Separiamo questo termine dagli altri:

$$N = \frac{z}{1-z} + \sum'_{\mathbf{k}} \frac{1}{e^{\epsilon_{\mathbf{k}}/k_{\text{B}}T}/z - 1}, \quad (11)$$

dove abbiamo introdotto la fugacità

$$z = e^{-(\mu_0 - \mu)/k_{\text{B}}T}, \quad (12)$$

e la somma percorre tutti i valori di  $\mathbf{k}$ , eccetto  $(0, \dots, 0)$ .

### 3 Numero di particelle negli stati eccitati

Il numero di particelle negli stati eccitati è dato da

$$N' = \sum'_{\mathbf{k}} \frac{1}{e^{\epsilon_{\mathbf{k}}/k_{\text{B}}T}/z - 1}. \quad (13)$$

Calcoliamo questa somma introducendo  $n = \sum_{i=1}^d k_i$ . Otteniamo così

$$N' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{N}_d(n)}{e^{\kappa n}/z - 1}, \quad (14)$$

dove

$$\kappa = \frac{\hbar\omega_0}{k_{\text{B}}T}. \quad (15)$$

Approssimiamo questa somma con un integrale:

$$\sum_{i=m}^n f(n) \simeq \int_m^n dx f(x). \quad (16)$$

L'uso di questa espressione è reso scomodo dal fatto che la somma comincia con  $n = 1$  invece che  $n = 0$ . Ponendo  $n = p + 1$  si ottiene un'espressione più comoda:

$$N' = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\mathcal{N}_d(p+1)}{e^{\kappa p}/z' - 1}, \quad (17)$$

dove

$$z' = ze^{-\kappa}. \quad (18)$$

Valutiamo l'integrale:

$$I_k(z') = \int_0^{\infty} dx \frac{x^k}{e^{\kappa x}/z' - 1}. \quad (19)$$

Otteniamo

$$\begin{aligned}
I_k(z') &= \int_0^\infty dx x^k \sum_{\ell=1}^\infty z'^\ell e^{-\kappa\ell x} \\
&= \sum_{\ell=1}^\infty (\kappa\ell)^{-(k+1)} z'^\ell \int_0^\infty dx x^k e^{-x} = \Gamma(k+1) \kappa^{-(k+1)} \sum_{\ell=1}^\infty \frac{z'^\ell}{\ell^{k+1}} \\
&= \Gamma(k+1) \kappa^{-(k+1)} g_{k+1}(z'),
\end{aligned} \tag{20}$$

dove

$$g_k(z) = \sum_{\ell=1}^\infty \frac{z^\ell}{\ell^k} \tag{21}$$

è la funzione polylog.

Otteniamo così

$$N' \simeq \begin{cases} \kappa^{-2} g_2(z') + 2\kappa^{-1} g_1(z'), & \text{per } d = 2; \\ \kappa^{-3} g_3(z') + \frac{3}{2}\kappa^{-2} g_2(z') + \kappa^{-1} g_1(z'), & \text{per } d = 3. \end{cases} \tag{22}$$

## 4 Limite termodinamico

Parametrizziamo il potenziale armonico con un parametro energia  $u_0$  e un parametro di lunghezza  $R_0$ :

$$m\omega_0^2 = \frac{u_0}{R_0^2}, \tag{23}$$

per cui

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{u_0}{m}} \frac{1}{R_0}. \tag{24}$$

Definiamo il limite termodinamico come  $N \rightarrow \infty$ ,  $\omega_0 \rightarrow 0$ , con  $\rho = N/R_0^d = \text{const}$ . Abbiamo allora

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{u_0}{m}} \left(\frac{\rho}{N}\right)^{1/d}, \tag{25}$$

e

$$\kappa = \frac{\hbar\omega_0}{k_B T} = \frac{\hbar}{k_B T} \sqrt{\frac{u_0}{m}} \left(\frac{\rho}{N}\right)^{1/d} = \frac{T_0}{T} N^{-1/d}, \tag{26}$$

dove  $T_0$  è definito da

$$T_0 = \frac{\hbar}{k_B} \sqrt{\frac{u_0}{m}} \rho^{1/d}. \tag{27}$$

Otteniamo così

$$N' \simeq \begin{cases} N \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 g_2(z') + 2\sqrt{N} \frac{T}{T_0} g_1(z'), & \text{per } d = 2; \\ N \left(\frac{T}{T_0}\right)^3 g_3(z') + \frac{3}{2} N^{2/3} \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 g_2(z') + N^{1/3} \left(\frac{T}{T_0}\right) \kappa^{-1} g_1(z'), & \text{per } d = 3. \end{cases} \tag{28}$$

In entrambi gli sviluppi il primo termine domina nel limite termodinamico. In questo limite, il massimo valore di  $z'$  è pari a 1. Quindi  $N'$  non può superare

$$N'_{\max} = \begin{cases} N \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 g_2(1) = N \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 \frac{\pi^2}{6}, & \text{per } d = 2; \\ N \left(\frac{T}{T_0}\right)^3 \zeta_R(3), & \text{per } d = 3. \end{cases} \tag{29}$$

Troviamo così la temperatura di transizione:

$$T_c = T_0 \cdot \begin{cases} \sqrt{6}/\pi = 0.7797, & \text{per } d = 2; \\ \sqrt[3]{1/\zeta_R(3)} = 0.9405, & \text{per } d = 3. \end{cases} \quad (30)$$

Notare che  $g_1(z)$  diverge per  $z \rightarrow 1$ , e che quindi è necessario prendere *prima* il limite termodinamico, e passare poi alle basse temperature, per osservare la transizione.

Nell'esperimento di Cornell e Wieman del 1995,  $N \simeq 2 \cdot 10^3$  atomi di rubidio (Rb) sono stati portati a temperature dell'ordine di 170 nK. In queste condizioni,  $\hbar\omega \simeq 0.09 k_B T \simeq 2.10 \cdot 10^{-31}$  J, per cui  $\omega \simeq 2.0 \cdot 10^3$  s<sup>-1</sup>. La massa di un atomo di rubidio è pari a  $87/N_A = 14.25 \cdot 10^{-23}$  g, dove  $N_A = 6.02 \cdot 10^{23}$  è il numero di Avogadro. La lunghezza caratteristica "di confinamento" è data da  $\ell = \sqrt{\hbar/m\omega} = 0.602$  μm.