

# Attrito fra superfici solide

L. P.

26 marzo 2010

Disponiamo due corpi solidi, aventi ciascuno una superficie piana, a contatto tramite questa superficie. Se esercitiamo sui due corpi delle forze che tendono ad avvicinarli, si eserciteranno fra i corpi delle forze: la forza normale è una forza vincolare, che esprime il vincolo di *impenetrabilità* dei due corpi. La componente tangenziale è una forza chiamata **attrito**, che tende ad impedire ai due corpi di strisciare l'uno rispetto all'altro.

L'attrito ha una grande importanza pratica, e di conseguenza è stato studiato sistematicamente da molto tempo: i primi studi risalgono a Leonardo da Vinci, che costruì diversi strumenti per il suo studio (lui lo chiamava *disfregamento*) e addirittura inventò il cuscinetto a sfere per sfruttare il fatto che l'attrito *volvente* è spesso meno intenso dell'attrito *radente* (come vedremo più avanti). Dopo la rivoluzione newtoniana, lo studio più importante dell'attrito fra superfici solide fu compiuto da Charles de Coulomb (1736–1806): sua è la teoria che descriveremo succintamente in quanto segue.

Dobbiamo tenere presente che le leggi dell'attrito fra superfici solide (così come le analoghe leggi della resistenza al moto in un mezzo viscoso) sono delle *leggi empiriche* o *fenomenologiche*: esse non sono leggi universali come, p.es., le leggi della dinamica o la legge di gravitazione universale, ma rappresentano un'utile compendio del comportamento dei sistemi mediante delle espressioni matematiche che, se sono semplici, hanno comunque un ristretto ambito di validità, e i cui parametri dipendono spesso in maniera difficilmente controllabile dalle condizioni sperimentali. Questo è vero per le leggi dell'attrito molto più che per le leggi della resistenza in un mezzo viscoso, fra l'altro per il fatto che molto spesso le proprietà dell'attrito fra superfici solide dipendono da particolari della preparazione delle superfici che sono difficilmente controllabili dallo sperimentatore.

## Attrito statico

L'**attrito statico** è l'attrito che si esercita fra due corpi a contatto in quiete reciproca. Per fissare le idee, consideriamo un corpo di massa  $m$ , avente una superficie piana, posto sopra una superficie piana ed orizzontale. In questa condizione il corpo rimane in quiete, perché la forza-peso  $m\mathbf{g}$  applicata al corpo è equilibrata dalla reazione vincolare  $\mathbf{N}$  del piano orizzontale, che è diretta verticalmente verso l'alto:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{N} = 0. \quad (1)$$

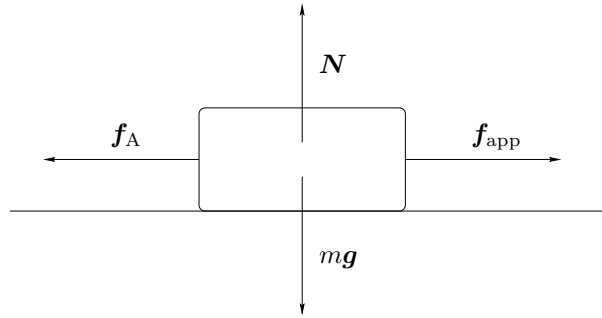
L'esperienza mostra che il corpo rimane in quiete anche se ad esso viene applicata una forza orizzontale  $\mathbf{f}_{\text{app}}$  (cf. fig. 1). Quindi in questo caso il piano orizzontale deve esercitare sul corpo una forza orizzontale (che indichiamo con  $\mathbf{f}_A$ ) che equilibri esattamente la forza applicata  $\mathbf{f}_{\text{app}}$ .

Questa situazione permane fin tanto che la forza applicata non supera, in modulo, una certa soglia  $f_c$ . Per forze più intense, il corpo non rimane più in quiete ma incomincia a muoversi di moto *uniformemente accelerato*. Si ottiene dall'esperienza che la soglia è proporzionale al modulo della reazione vincolare  $\mathbf{N}$ :

$$f_c = \mu_S N. \quad (2)$$

Il coefficiente  $\mu_S$  è positivo (essendo il rapporto fra due moduli) ed è chiamato **coefficiente di attrito statico**. Inoltre esso dipende solo dalla *natura* delle superfici a contatto, ma non dalla loro *area*.

Possiamo illustrare questo risultato in un'altra maniera. Consideriamo un corpo solido posto a contatto con una superficie piana, e sottoposto a una forza applicata  $\mathbf{f}_{\text{app}}$  che ha una componente

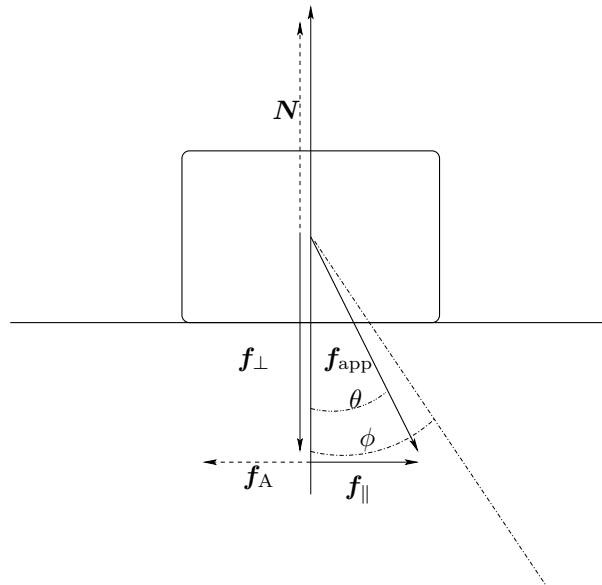


**Figura 1.** Attrito statico. Una forza orizzontale  $f_{app}$  viene applicata a un corpo in quiete posto su un piano d'appoggio orizzontale. Poiché il corpo non si muove, ne segue che il piano esercita sul corpo una forza di **attrito statico**  $f_A$  uguale in modulo e diretta in verso opposto a  $f_{app}$ .

normale alla superficie, e diretta verso di essa (per cui la forza applicata “tende a schiacciare” il corpo sulla superficie). Allora il corpo rimarrà in quiete fin tanto che la direzione della forza applicata appartiene a un cono di semiapertura  $\phi$  attorno alla normale alla superficie, dove  $\phi$  è un angolo che soddisfa la relazione

$$\tan \phi = \mu_S. \quad (3)$$

Questa situazione è illustrata nella figura (2). Il cono così ottenuto è chiamato **cono di stabilità**. Nella



**Figura 2.** Cono di stabilità.

situazione illustrata in figura, la forza applicata  $f_{app}$  ha rispettivamente una componente normale  $f_{\perp}$  e una componente tangenziale  $f_{||}$ . Detto  $\theta$  l'angolo fra la direzione di  $f_{app}$  e la normale alla superficie, si ha la seguente relazione fra i moduli:

$$f_{||} = \tan \theta f_{\perp}. \quad (4)$$

La condizione di stabilità è  $f_{||} < \mu_S f_{\perp}$ . Questa condizione sarà soddisfatta fin tanto che

$$\theta < \phi, \quad (5)$$

dove l'angolo  $\phi$  è implicitamente definito dalla relazione (3).

Consideriamo per esempio il caso di un corpo soggetto alla forza-peso e posto su un piano inclinato di inclinazione pari a  $\theta$ . Allora è facile vedere che il corpo rimarrà in quiete solo fin tanto che  $\theta < \phi$ , dove  $\phi$  è l'angolo definito dalla (3).

### Attrito dinamico

Quando la componente tangenziale  $f_{\parallel}$  della forza applicata supera il valore critico  $\mu_S f_{\perp}$ , il corpo comincia a muoversi di moto uniformemente accelerato. Questo implica che la forza esercitata dalla superficie di contatto è una forza costante in modulo. Coulomb poté mostrare sperimentalmente che questa forza (detta **forza di attrito dinamico**) possiede le seguenti proprietà:

1. Se le superfici di contatto sono isotrope, la forza è diretta come la velocità relativa del corpo rispetto alla superficie, ma in verso opposto;
2. Il modulo della forza è indipendente dalla velocità, è proporzionale alla componente normale della forza applicata, ed è indipendente dall'area delle superfici in contatto;
3. Il coefficiente di proporzionalità  $\mu_D$ , che è chiamato **coefficiente di attrito dinamico**, dipende dalla natura delle superfici in contatto.

Abbiamo così

$$\mathbf{f}_A = -\mu_D N \hat{\mathbf{v}}. \quad (6)$$

In questa espressione,  $N$  è il modulo della reazione vincolare (uguale al modulo della componente normale della forza applicata) e  $\hat{\mathbf{v}}$  è il **versore** parallelo alla velocità, cioè un vettore di modulo unità, e diretto come la velocità:

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{v}. \quad (7)$$

Notiamo quindi che questa forza, chiamata **forza di attrito dinamico**, è una forza dipendente dalla velocità, sebbene il suo modulo non ne dipenda.

Il coefficiente di attrito dinamico  $\mu_D$  è positivo (poiché è espresso come rapporto fra due moduli) e dipende fortemente dalla natura delle superfici in contatto. Può essere reso piccolo da procedimenti di **lubrificazione**, cioè interponendo fra le superfici un sottile strato di fluido. In generale, *esso è più piccolo del coefficiente di attrito statico  $\mu_S$  fra le medesime superfici*. Quindi un corpo che sia sottoposto a una forza la cui componente tangenziale supera di poco la soglia definita dall'attrito statico, si muoverà di moto uniformemente accelerato, con una forza risultante pari in modulo a  $(\mu_S - \mu_D)N$ . Viceversa, se consideriamo un corpo su una superficie piana, animato inizialmente di una velocità tangente al piano di modulo  $v_0$ , e su cui si esercita una forza applicata normale al piano di modulo  $f$ , il corpo subirà un'accelerazione diretta in verso opposto alla velocità e di modulo pari a  $a = \mu_D N/m$ , dove  $m$  è la sua massa. Esso si arresterà dopo un tempo  $t = v_0/a$ , dopo di che rimarrà in quiete.

### Attrito volvente

Le forze d'attrito che abbiamo discusso si esercitano fra superfici che strisciano (o tendono a strisciare) l'una sull'altra. Questa forma d'attrito viene chiamata **attrito radente**. D'altra parte, fin dalla preistoria ci si è resi conto che l'attrito dinamico viene molto ridotto interpolando fra il corpo che si cerca di spostare e la superficie su cui esso si appoggia uno strumento in grado di rotolare: la ruota. Non possiamo discutere qui la cinematica del rotolamento di una ruota su una superficie: lo faremo più avanti. Per ora è sufficiente notare che nel caso di rotolamento, le superfici (della ruota e del piano di appoggio) a contatto non strisciano l'una sull'altra, e quindi che non si ha attrito dinamico fra superfici, ma piuttosto con attrito statico. Tuttavia anche in questa situazione si sperimenta una forza opposta al moto e di modulo proporzionale alla componente normale della forza applicata: questa forza è dovuta in ultima analisi alle piccole deformazioni della ruota e della superficie nel punto di contatto. Il comportamento fenomenologico della forza d'attrito in questa situazione è simile a quello dell'attrito dinamico. La differenza fondamentale è che la forza (diretta in verso opposto alla velocità) è sì proporzionale alla componente normale della forza applicata, ma il coefficiente è *inversamente proporzionale al raggio  $R$  della ruota*:

$$f_A = \frac{\mu_N}{R} N. \quad (8)$$

Il **coefficiente di attrito volvente** ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza e dipende dalla natura delle superfici a contatto. È chiaro che in questa situazione si ha interesse ad utilizzare ruote di grande raggio per ridurre quanto è possibile la forza necessaria a spostare il carico.